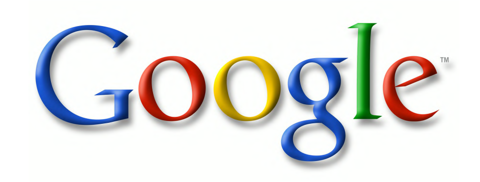




Math 3009.03.7
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ECCLESIAE





EXPOSÉ SYNTHÉTIQUE

DES

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA NOMOGRAPHIE,

PAR

M. MAURICE D'OCAGNE,

PROFESSEUR À L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
RÉPÉTITEUR À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1903



EXPOSÉ SYNTHÉTIQUE

DES

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA NOMOGRAPHIE.

Extrait du *Journal de l'École Polytechnique*, 2e série (Cahier n° 8).

EXPOSÉ SYNTHÉTIQUE

DES

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA NOMOGRAPHIE,

PAR

M. Maurice D'OCAGNE,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

EXPOSÉ SYNTHÉTIQUE

DES

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA NOMOGRAPHIE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

PRÉAMBULE.

La Nomographie a, comme on sait, pour but l'étude de la représentation des équations à un nombre quelconque de variables au moyen d'éléments cotés figurés sur un plan ou sur plusieurs plans superposés mobiles les uns par rapport aux autres.

Dans l'Ouvrage ([1]) où nous l'avons développée, nous nous adressions avant tout à ceux qui peuvent avoir à effectuer des applications pratiques de cette théorie. Aussi, tout en exposant les principes d'après une marche systématique, avons-nous eu soin de commencer par les cas les plus simples, les plus fréquents aussi dans la pratique, pour n'atteindre que progressivement à la théorie prise dans toute son ampleur.

Nous estimions toutefois ([2]) qu'il eût été plus intéressant pour les mathématiciens de suivre la marche inverse consistant à poser tout d'abord, dans les termes les plus généraux, le problème de la représentation nomographique des équations, pour déduire ensuite de sa solution

([1]) *Traité de Nomographie* (Paris, Gauthier-Villars; 1899). Cet Ouvrage sera, par la suite, désigné par les lettres *T. de N.* Les travaux qui lui ont donné naissance ont été couronnés du Prix Poncelet, par l'Académie des Sciences, dans sa séance publique annuelle du 22 décembre 1902.

([2]) *Loc. cit.,* Introduction, p. IX.

les diverses méthodes d'un usage courant dans la pratique. Et c'est pour réaliser cette pensée que nous avons entrepris la rédaction du présent Mémoire.

Mais en revoyant à cet effet la théorie générale contenue dans le Chapitre VI (Section I) de notre Traité, nous avons été amené à établir une distinction nouvelle entre les types fondamentaux de nomogrammes. La classification que nous avions fondée sur la double considération du nombre des variables en présence et du nombre des plans mobiles sur lesquels sont figurés les éléments, cotés ou non, intervenant dans la représentation, offre un intérêt évident. Mais elle conduit à un nombre indéfini de types distincts; elle classe, en outre, dans des catégories différentes, des nomogrammes rentrant en réalité dans une même famille, comme, par exemple, ceux à points alignés, suivant que ces points sont à une ou à plusieurs cotes. Cette remarque nous a inspiré l'idée de chercher à réduire tous les nomogrammes possibles à un nombre fini de types, canoniques en quelque sorte, en nous plaçant uniquement au point de vue de leur structure. C'est ce à quoi nous sommes parvenu en étudiant tous les modes possibles de répartition des éléments sans cote, ou *constants*, entre les divers contacts dont la simultanéité définit le mode d'emploi du nomogramme. Nous avons pu ainsi, comme on le verra plus loin, ramener tous les nomogrammes à vingt types canoniques dont un à un seul plan et dix-neuf à deux plans, tous les autres pouvant être obtenus par combinaison de ceux-ci. L'exposé qui va suivre, nouveau par son essence même d'après ce qui vient d'être dit, renferme encore nombre de remarques et de résultats inédits.

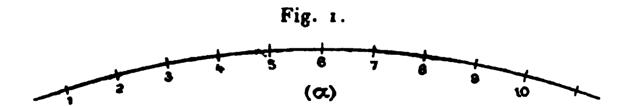
Nous n'y abordons d'ailleurs le détail d'aucune application technique, renvoyant pour ce côté du sujet, ainsi que pour les références bibliographiques, à l'Ouvrage cité plus haut.

Si l'on se place à un point de vue purement abstrait, on peut dire que la présente étude définit tous les modes de représentation plane applicables à des êtres géométriques à n dimensions.

I. — Systèmes d'éléments cotés.

1. *Points et lignes à une cote.* — Si des points dépendant d'un paramètre sont marqués sur un plan, la valeur correspondante du paramètre étant inscrite à côté de chacun d'eux, ils constituent un système de *points*

Fig. 1.



à une cote (*fig.* 1). Si les coordonnées x et y de ces points s'expriment en fonction du paramètre α par

$$x = f(\alpha), \qquad y = \varphi(\alpha),$$

ces points sont distribués sur la ligne définie par l'ensemble de ces deux équations paramétriques, ligne qui est dite le *support* du système (α). Ce support est rectiligne lorsqu'il existe une relation linéaire entre les fonctions f et φ.

Dans ce cas, le support étant pris pour axe des x, et les points marqués sur cet axe étant définis par

$$x = f(\alpha),$$

on a ce qu'on appelle l'*échelle de la fonction* $f(\alpha)$ [1]. Si de même, dans un système de lignes dépendant d'un paramètre (système simplement

---

[1] Les échelles pratiquement les plus utiles à considérer sont celles des fonctions α, $\log\alpha$ et $\cos\alpha$, et celles qui s'en déduisent projectivement par la formule

$$x = \frac{mf(\alpha) + n}{pf(\alpha) + q}.$$

Si d'ailleurs une telle échelle et celle de la fonction $f(\alpha)$ sont portées sur deux droites divergentes telles qu'au point commun à ces deux droites la cote soit la même sur l'une et l'autre échelle, ces deux échelles sont *effectivement* projectives l'une de l'autre, c'est-à-dire que les droites joignant leurs points de même cote passent toutes par un même point, centre de projection (*T. de N.*, p. 15).

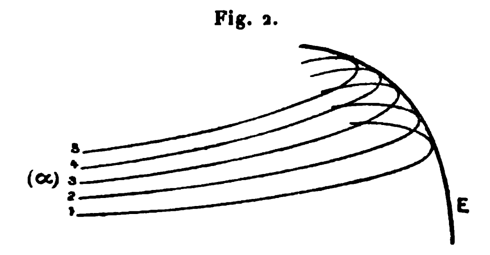
infini), on cote chacune de ces lignes au moyen de la valeur correspondante du paramètre, on obtient un système de *lignes à une cote* (*fig.* 2).

Si l'équation définissant le système est

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

les lignes (α) sont tangentes à une certaine enveloppe E dont l'équation s'obtient, comme on sait, en exprimant que l'équation précédente a une racine double en α. La considération de cette enveloppe ne peut d'ail-

Fig. 2.



leurs, comme on le verra par la suite, offrir d'intérêt pratique que si les lignes (α) sont des droites.

2. *Points et lignes à deux cotes.* — On peut aussi considérer des points dépendant de deux paramètres et les figurer sur un plan. Soient

$$x = f(\alpha, \beta), \qquad y = \varphi(\alpha, \beta),$$

les équations définissant les coordonnées de ces points. Pour chaque valeur de α, la variation de β dans ces équations donne naissance à une courbe qui sera cotée au moyen de cette valeur de α; de même, pour chaque valeur de β, la variation de α donne naissance à une courbe qui sera cotée au moyen de cette valeur de β. Un point correspondant à des valeurs particulières de α et β sera dès lors à la rencontre des courbes (α) et (β) cotées au moyen de ces valeurs particulières. Ainsi se trouve défini un système de *points à deux cotes* (*fig.* 3). On peut dire qu'un point à deux cotes est un point défini dans un système quelconque de coordonnées curvilignes

L'ensemble des systèmes (α) et (β) ci-dessus définis constitue le *réseau* du système (α, β).

Exceptionnellement, il peut se faire que les fonctions $f(\alpha, \beta)$ et $\varphi(\alpha, \beta)$ ne soient pas indépendantes, et que l'on ait identiquement

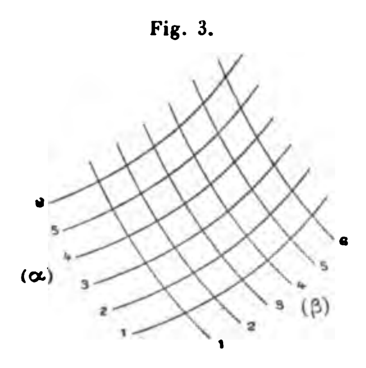
$$F[f(\alpha, \beta), \varphi(\alpha, \beta)] = 0.$$

Dans ce cas tous les points (α, β) se trouvent sur la ligne dont l'équation est

$$F(x, y) = 0,$$

chaque point de cette ligne correspondant à une infinité de couples de valeurs de α et β. On dit alors que les points à deux cotes sont *condensés*

Fig. 3.



sur cette ligne qui est appelée leur *support*. Nous verrons un peu plus loin, après avoir parlé des lignes condensées, comment on peut figurer graphiquement un tel système de points cotés.

La figuration simultanée de lignes dépendant de deux paramètres n'est généralement pas possible sur un plan, attendu qu'à chaque valeur de l'un des paramètres correspondrait un système de lignes à une cote, et que la superposition des systèmes correspondant aux diverses valeurs attribuées à ce paramètre produirait un enchevêtrement absolument inextricable à la vue.

Il n'y aura exception que si toutes les lignes à tracer se réduisent graphiquement à un système simplement infini dont chaque ligne correspond

alors à une infinité simple de couples de cotes. Cette circonstance se produit lorsque l'équation du système à deux cotes est de la forme

$$F[x, y, \theta(\alpha, \beta)] = 0.$$

En effet, toutes les lignes (α, β) correspondant à des couples de valeurs de α et β, pour lesquels *la fonction* $\theta(\alpha, \beta)$ *a une même valeur* t, sont alors coïncidents. Les lignes (α, β) sont alors *condensées* en les lignes (t).

Comment, en ce cas, pourra-t-on figurer les divers couples de valeurs des paramètres α et β correspondant à chaque ligne (t)? Par le procédé bien simple que voici : à travers le système des lignes (t) définies par l'équation

$$F(x, y, t) = 0,$$

traçons un système de lignes *absolument quelconques* que nous faisons dépendre de l'un des deux paramètres, α par exemple, par une équation telle que

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0.$$

Si maintenant nous nous fixons une certaine valeur pour β et si nous considérons tous les couples de valeurs correspondants de α et t résultant de l'équation

$$\theta(\alpha, \beta) = t,$$

nous voyons que les points de rencontre des lignes (t) et (α) correspondantes se trouveront sur une ligne, dont l'équation

$$\Psi(x, y, \beta) = 0$$

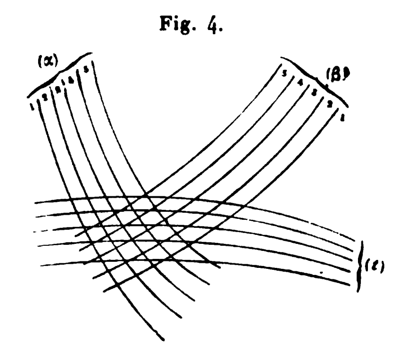
résulte de l'élimination de α et t entre les trois précédentes, et qui pourra être cotée au moyen de la valeur choisie pour β. En faisant varier cette valeur de β, on obtiendra un système de lignes (β), défini par la dernière équation écrite, et qui, joint au système des lignes (α), choisi arbitrairement, fait connaître les divers couples de cotes afférents aux lignes du système (t) (*fig.* 4).

On profitera d'ailleurs de l'aléa que présente le choix du système (α) en vue de la plus grande simplicité possible.

L'ensemble des systèmes (α) et (β) forme le *réseau de cotes* du système (t), et la ligne (α, β) n'est autre que la ligne (t) passant par le point (α, β) de ce réseau.

Inversement, si l'on se donne une ligne (t) et l'une de ses cotes α,

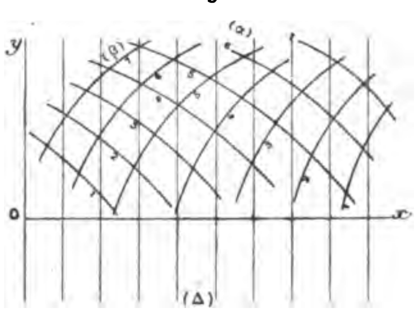
Fig. 4.



l'autre cote s'en déduit immédiatement; c'est la cote β du point où la ligne (t) considérée rencontre la ligne (α) du réseau.

Si les lignes condensées (t) sont des droites Δ parallèles (*fig.* 5), leur

Fig. 5.



ensemble constitue ce qu'on appelle une *échelle binaire* [1].

On voit maintenant qu'on peut définir un système de *points condensés* par la rencontre de leur support avec un système quelconque de lignes (t)

---

[1] L'emploi systématique de telles échelles a été proposé pour les abaques hexagonaux par M. E. Prévot.

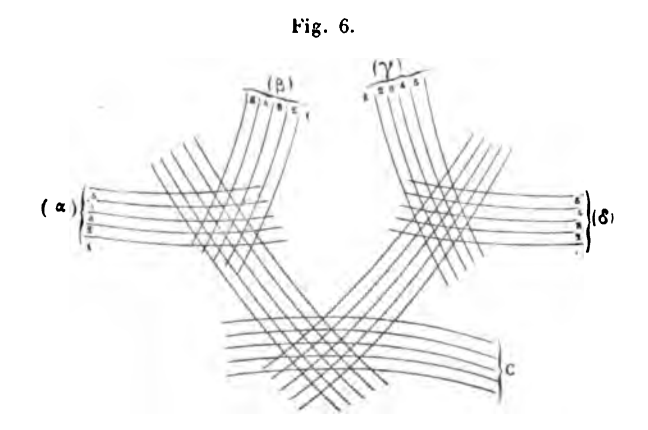
condensées, et, en particulier, puisqu'on peut prendre pour ces lignes (t) les parallèles à l'un ou à l'autre des axes Ox et Oy, qui nous ont servi à définir ces points, par la rencontre de leur support avec une échelle binaire.

Remarque. — On pourrait de même définir les cotes d'un système de lignes condensées (t) au moyen d'un second système (t') muni d'un réseau de cotes et tel qu'il existe une correspondance univoque simple (par contact, par exemple) entre les lignes (t) et les lignes (t'). Théoriquement, il ne semble y avoir là qu'une complication superflue; pratiquement, cela peut permettre, le cas échéant, d'éloigner *ad libitum* le réseau de cotes du centre du tableau en vue d'une plus parfaite netteté.

3. *Éléments à n cotes.* — Il résulte de ce qui précède qu'un réseau de points à deux cotes provient de la rencontre de deux systèmes de lignes à une cote, et qu'un système de lignes condensées à deux cotes emprunte les cotes d'un réseau de points à deux cotes à travers lequel il est tracé.

Rien n'empêche dès lors de considérer les deux systèmes constituant

Fig. 6.



un réseau de points à deux cotes comme étant eux-mêmes des systèmes de lignes condensées à deux cotes définies au moyen d'un réseau *ad hoc*.

La répétition de cette opération permet, comme on voit, de multiplier autant qu'on le veut, théoriquement du moins, le nombre des cotes afférentes à un système quelconque d'éléments, points ou lignes, donnés.

La figure 6 donne, par exemple, la représentation schématique d'un système de courbes C à quatre cotes α, β, γ, δ. La courbe C correspondant à un système de valeurs des quatre variables est celle qui passe par le point de rencontre de la ligne condensée (α, β) et de la ligne condensée (γ, δ). Et l'on voit que, si la courbe C est donnée ainsi que trois de ses cotes, la quatrième s'en déduit immédiatement.

Si les courbes C étaient des droites parallèles, leur ensemble constituerait ce qu'on appelle une *échelle multiple*. En voici un exemple (¹) : supposons que les lignes (α, β) soient des parallèles à Oy, données par

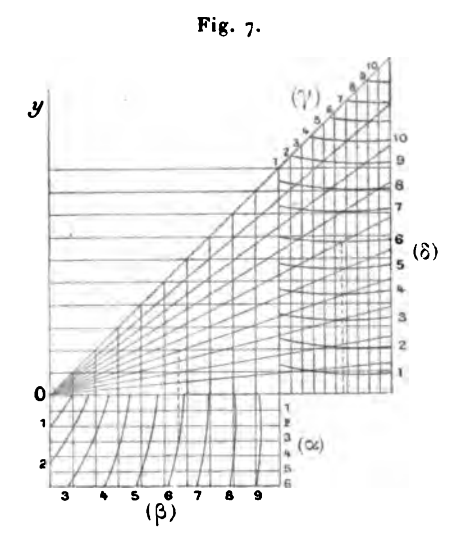
$$x = \varphi(\alpha, \beta),$$

et les lignes (γ, δ) des radiantes issues de l'origine O, et données par

$$y = x\psi(\gamma, \delta).$$

Les premières seront définies par un réseau de cotes dans lequel les

Fig. 7.



lignes (α), choisies arbitrairement, pourront être des parallèles à Ox; et,

(¹) Ce type particulier d'échelle multiple a été employé par M. Lallemand dans ses abaques hexagonaux.

de même, les secondes par un réseau de cotes dans lequel les lignes (γ) pourront être des parallèles à Oy. On obtiendra ainsi la figure 7, sur laquelle les parallèles à Ox passant par les points de rencontre des parallèles (α, β) à Oy et des radiantes (γ, δ) constituent une échelle $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ donnée par

$$y = \varphi(\alpha, \beta)\psi(\gamma, \delta).$$

Si, au lieu de radiantes issues de l'origine, on avait, sur le réseau (γ, δ), tracé des droites appartenant à un système simplement infini quelconque, leur équation eût été de la forme

$$y = x\chi(\gamma, \delta) + \chi_1(\gamma, \delta),$$

et l'échelle multiple obtenue, de la forme

$$y = \varphi(\alpha, \beta)\chi(\gamma, \delta) + \chi_1(\gamma, \delta).$$

Il est inutile d'insister davantage sur ce sujet. Mais, de ce qui précède, résulte cette conclusion importante : *analytiquement, tout élément à plus de deux cotes dépend de ces cotes par un enchaînement de fonctions de deux arguments.*

II. — Représentation nomographique sur un seul plan.

4. *Éléments en contact.* — Ayant défini des éléments à un nombre quelconque de cotes, on voit que le problème de la représentation nomographique sur un seul plan (c'est-à-dire sans élément mobile) se pose d'une manière générale comme suit :

Étant donnée une équation à n variables, établir, si possible, entre un élément à p cotes et un élément à $n - p$ cotes, figurés sur un même plan, une relation de position pouvant se juger à simple vue et qui se traduise analytiquement par une relation entre les n cotes, prises pour variables, identique à l'équation proposée.

Pour préciser cet énoncé quelque peu vague, nous admettrons le postulat que voici, dont un peu de réflexion permet de reconnaître la justesse.

La seule relation précise de position entre deux éléments, qui puisse être jugée à vue, c'est leur contact.

Pour donner à cet énoncé toute sa généralité, il convient de dire qu'*un point est en contact avec une ligne* lorsque ce point est situé sur cette ligne. En particulier, le parallélisme de deux droites rentrera dans la désignation du contact, pris dans le sens étendu où nous l'entendons ici, si l'on considère qu'il peut se traduire par le fait pour l'une de ces droites de passer par le point situé à l'infini sur l'autre.

D'une manière générale, si les éléments désignés par les lettres A et B sont en contact, nous exprimerons cette relation par la notation

$$A \mapstochar\!\!\!\dashv B.$$

Lorsqu'un élément E dépendra des cotes α, β, γ, . . . , nous l'indiquerons par la notation

$$E(\alpha, \beta, \gamma, \ldots).$$

Si, sans spécifier les cotes α, β, γ, . . . attachées à l'élément E, nous voulons simplement faire connaître leur nombre n, nous écrirons

$$E^{(n)}.$$

De la sorte, la représentation nomographique ci-dessus définie s'exprimera par

$$E^{(n)} \mapstochar\!\!\!\dashv E'^{(n-p)}.$$

Lorsqu'il sera spécifié que l'élément E sera un point nous ferons usage de la lettre P. Nous verrons plus loin l'intérêt qu'il y a à considérer à part les cas où cet élément appartient soit à un système de droites paralèlles,

soit à un système de cercles concentriques ; aussi réserverons-nous spécialement à la désignation de ces cas les lettres Δ et Γ.

5. *Équations à deux et à trois variables. Abaques.* — Supposons tracés sur un plan deux systèmes quelconques de lignes à une cote

$$(\alpha_1) \qquad f_1(x, y, \alpha_1) = 0,$$

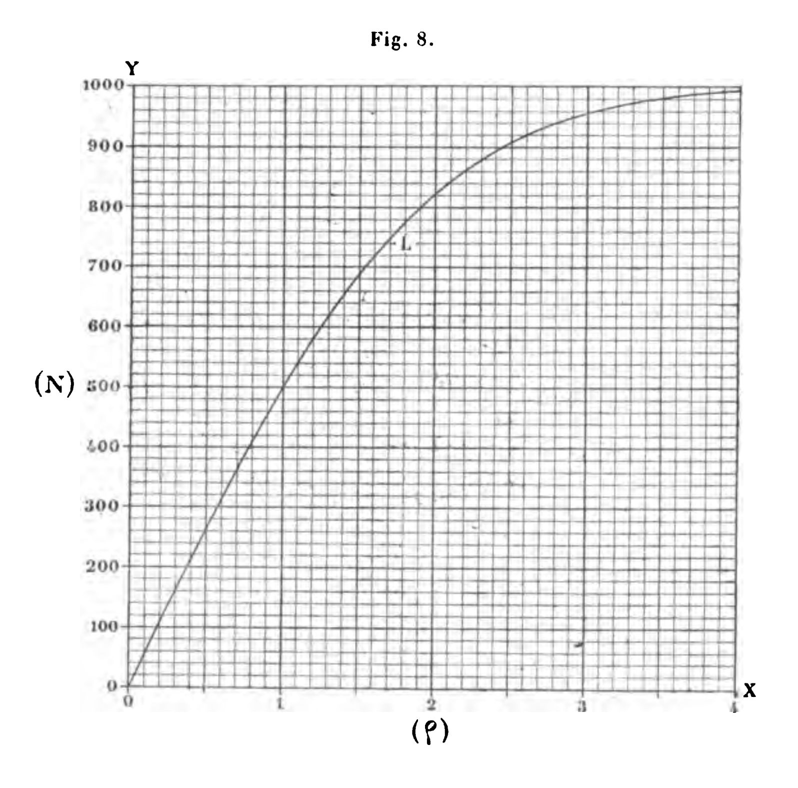
$$(\alpha_2) \qquad f_2(x, y, \alpha_2) = 0,$$

dont l'ensemble définit un réseau de points à deux cotes (α_1, α_2), et soit

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = 0$$

une équation quelconque entre les variables α_1 et α_2. Il est clair que les

Fig. 8.



points (α_1, α_2) dont le couple de cotes satisfait à cette équation sont situés

sur une ligne L dont l'équation s'obtiendrait par l'élimination de α_1 et α_2 entre les trois précédentes.

Le choix des équations (α_1) et (α_2) étant arbitraire, on peut toujours les prendre sous la forme

$$x - \alpha_1 = 0, \qquad y - \alpha_2 = 0,$$

ce qui (lorsque, suivant l'habitude, on fait croître α_1 et α_2 par échelons égaux) donne au réseau (α_1, α_2) l'aspect d'un damier (en grec ἄβαξ) d'où le nom d'*abaque* donné à une telle représentation.

Voici (*fig.* 8), à titre d'exemple, l'abaque de l'équation de la probabilité des écarts

$$N = 1000\,\Theta(\rho),$$

où

$$\Theta(\rho) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\rho e^{-x^2}\,dx.$$

Si, l'équation étant écrite sous la forme

$$\alpha_2 = F(\alpha_1),$$

on définit le réseau (α_1, α_2) par les équations

$$x - F(\alpha_1) = 0, \qquad y - \alpha_2 = 0,$$

la ligne L devient une droite. La figure 9 indique cette transformation pour l'abaque de la figure 8.

Reprenant les systèmes quelconques (α_1) et (α_2) qui définissent ci-dessus le réseau (α_1, α_2) de points à deux cotes, donnons-nous maintenant une équation à trois variables

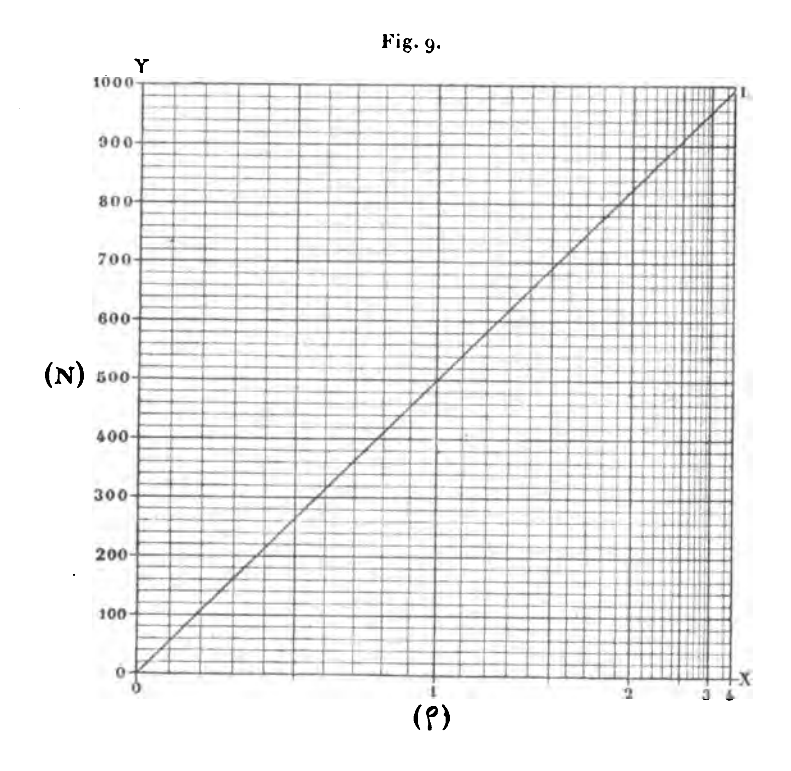
$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0.$$

A chaque valeur de α_3 correspondra une ligne L dont l'équation,

$$(\alpha_3) \qquad f_3(x, y, \alpha_3) = 0,$$

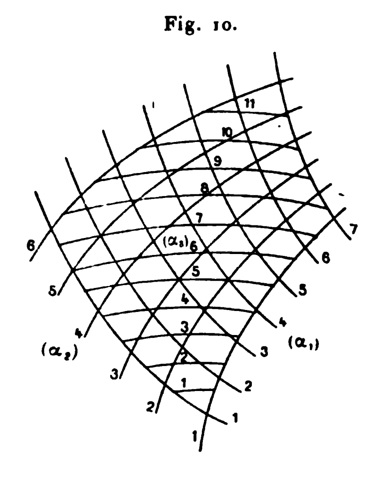
proviendra de l'élimination de α_1 et α_2 entre les équations (α_1), (α_2) et l'équation donnée. L'ensemble de ces lignes L constituera un système (α_3)

Fig. 9.



à une cote, et l'on voit que *pour un système de valeurs de* α_1, α_2, α_3 *satis-*

Fig. 10.



faisant à l'équation donnée, le point (α_1, α_2) *sera en contact avec la*

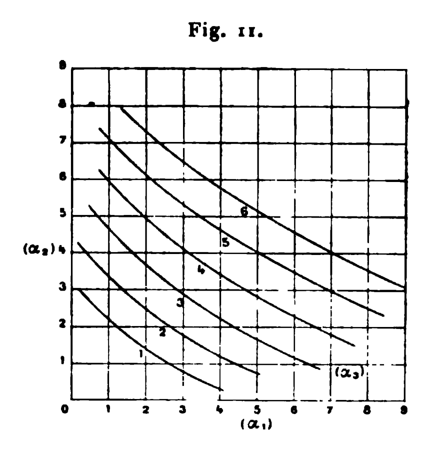
ligne (α_3). Autrement dit, les lignes (α_1), (α_2) et (α_3) correspondantes concourent en un même point, ce qui montre que le même diagramme coté (*fig.* 10) se prêtera également bien au calcul d'une quelconque des trois variables en fonction des deux autres.

Ici encore, on pourra prendre les équations (α_1) et (α_2) sous la forme

$$x - \alpha_1 = 0, \qquad y - \alpha_2 = 0,$$

ce qui conduira à la disposition en abaque [1] de la figure 11.

Fig. 11.



Remarque. — Le mode de représentation ci-dessus repose sur le contact d'un point et d'une ligne. Plus généralement, on pourrait envisager le contact de deux lignes; mais une telle extension ne présenterait aucun intérêt, car, outre que le nomogramme qui en résulterait serait graphiquement moins simple, il ne saurait s'appliquer à des équations analytiquement plus générales, puisque la méthode précédente est applicable à des équations à deux ou à trois variables ***absolument quelconques***.

6. ***Anamorphose géométrique.*** — Puisqu'on peut, dans tous les cas,

---

[1] Par extension du terme, on a pris l'habitude de désigner par le mot *abaque* toute espèce de diagramme coté se prêtant au calcul à vue. Nous pensons qu'il est plus rationnel, ainsi que l'a proposé M. Schilling, de réserver cette appellation aux Tableaux cotés dont la disposition rappelle celle d'un damier, et d'appliquer aux représentations cotées de genre quelconque le terme de *nomogramme*.

constituer le système (α_1, α_2) au moyen de parallèles à Ox et Oy formant un damier régulier, il ne semble pas *a priori* qu'il y ait lieu d'envisager d'autres systèmes (α_1, α_2). Mais l'intérêt qui peut s'attacher à d'autres choix résulte immédiatement de la remarque que, dans certains cas, alors que le système (α_1, α_2) régulier, défini par

$$x = \alpha_1, \qquad y = \alpha_2,$$

conduirait à des lignes (α_3) plus ou moins compliquées, d'autres systèmes (α_1, α_2) également constitués de droites, mais autrement définies, pourront conduire à n'avoir pour lignes (α_3) que des droites.

C'est la substitution d'un tel système (α_1, α_2) au système régulier dont la considération s'offre en premier lieu, qui a reçu de Lalanne, premier auteur de la méthode, en 1846, le nom d'*anamorphose géométrique*.

Lalanne fit d'abord cette remarque à propos des équations de la forme [1]

$$\text{(I)} \qquad f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) = f_3(\alpha_3)$$

---

[1] Le problème consistant à reconnaître si une équation donnée peut prendre la forme (I) a été résolu par le comte Paul de Saint-Robert. Pour la forme (II) le problème a été résolu séparément par MM. Massau et Lecornu. Les résultats peuvent s'énoncer ainsi : De l'équation donnée en α_1, α_2, α_3, on tire

$$\frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_1} = p_1, \qquad \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_2} = p_2,$$
$$\frac{\partial^2 \alpha_3}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = s,$$

Si l'on pose $\frac{p_1}{p_2} = q$, l'équation sera réductible au type (I) lorsqu'on aura

$$\frac{\partial^2 \log q}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = 0.$$

Si l'on pose

$$\frac{s}{p_1 p_2} = u, \qquad \frac{1}{p_1 p_2} \frac{\partial^2 \log q}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = -v, \qquad \frac{p_2 \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - p_1 \frac{\partial v}{\partial \alpha_2}}{p_2 \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} - p_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha_2}} = w,$$

l'équation sera réductible au type (II) lorsqu'on aura

$$\frac{\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial w}{\partial \alpha_2}}{p_2} = v - uw.$$

Pour les démonstrations, *voir* : *T. de N.*, p. 418 à 427.

qui se traduisent par un abaque à trois systèmes de droites parallèles lorsqu'on définit le système (α_1, α_2) par les équations

$$x = f_1(\alpha_1), \qquad y = f_2(\alpha_2),$$

ce qui donne pour les lignes (α_3)

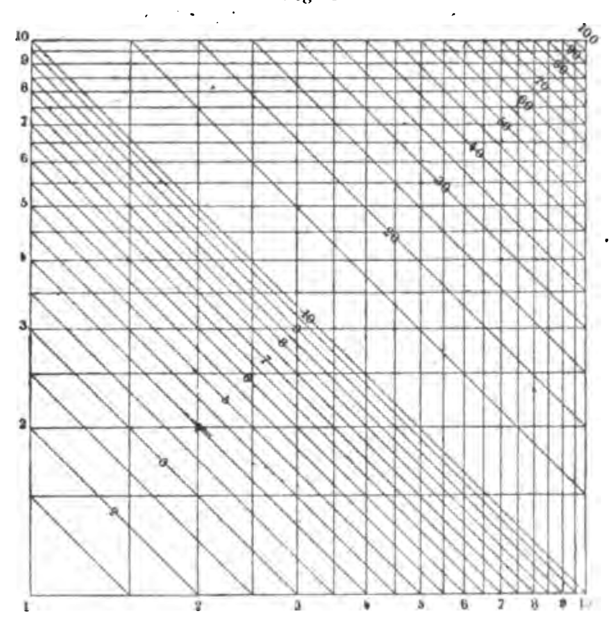
$$x + y = f_3(\alpha_3).$$

L'équation de la multiplication, lorsqu'on l'écrit

$$\log \alpha_1 + \log \alpha_2 = \log \alpha_3,$$

donne ainsi lieu à l'abaque de la figure 12.

Fig. 12.



Lalanne étendit aussi sa méthode aux équations de la forme

$$\text{(II)} \qquad f_1(\alpha_1) f_3(\alpha_3) + f_2(\alpha_2) \varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0,$$

dont l'abaque, lorsqu'on définit encore le système (α_1, α_2) au moyen des équations

$$x = f_1(\alpha_1), \qquad y = f_2(\alpha_2),$$

est constitué par les droites

$$xf_3(\alpha_3) + y\varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0.$$

M. Massau fit remarquer, en 1884, que l'anamorphose la plus générale s'applique aux équations qui peuvent se mettre sous la forme (¹)

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & \varphi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) \\ f_3(\alpha_3) & \varphi_3(\alpha_3) & \psi_3(\alpha_3) \end{vmatrix} = 0,$$

et sont effectivement représentables par l'entrecroisement des trois systèmes de droites (²)

$$xf_1(\alpha_1) + y\varphi_1(\alpha_1) + \psi_1(\alpha_1) = 0,$$
$$xf_2(\alpha_2) + y\varphi_2(\alpha_2) + \psi_2(\alpha_2) = 0,$$
$$xf_3(\alpha_3) + y\varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0.$$

7. *Nomogrammes à systèmes de cercles.* — A notre tour, nous avons fait remarquer qu'il était tout aussi intéressant, au point de vue de la simplicité de la construction, de considérer à part les équations représentables au moyen de systèmes de cercles, envisagés seuls ou associés à des systèmes de droites. Nous avons, à cet effet, considéré trois systèmes définis par des équations telles que

$$a_1(x^2 + y^2) + xf_1 + y\varphi_1 + \psi_1 = 0,$$
$$a_2(x^2 + y^2) + xf_2 + y\varphi_2 + \psi_2 = 0,$$
$$a_3(x^2 + y^2) + xf_3 + y\varphi_3 + \psi_3 = 0,$$

(¹) Le problème dont la solution a été indiquée ci-dessus pour les équations des types (I) et (II) reste à résoudre pour le type (III). M. Duporcq a toutefois fait connaître des conditions suffisantes (mais non nécessaires) de réductibilité à ce type. (*T. de N.*, p. 427)

(²) On trouvera un exemple d'abaque de ce genre au n° 51 du *T. de N.* (p. 109). Nous ne le reproduisons pas ici parce que, pour les équations de ce type, et en particulier pour l'exemple en question, la méthode des points alignés dont il sera parlé plus loin fournit une solution beaucoup plus satisfaisante.

où, d'une manière générale, $a_i, f_i, \varphi_i, \psi_i$ désignent des fonctions de la seule variable α_i ([1]), et nous avons effectué l'élimination sous forme symétrique de x et y entre ces équations par la méthode suivante :

Éliminant $x^2 + y^2$ entre les trois équations précédentes prises deux à deux, on obtient

$$\begin{vmatrix} f_1 & a_1 \\ f_2 & a_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \varphi_1 & a_1 \\ \varphi_2 & a_2 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} a_1 & \psi_1 \\ a_2 & \psi_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_2 & a_2 \\ f_3 & a_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \varphi_2 & a_2 \\ \varphi_3 & a_3 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} a_2 & \psi_2 \\ a_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_3 & a_3 \\ f_1 & a_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} \varphi_3 & a_3 \\ \varphi_1 & a_1 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} a_3 & \psi_3 \\ a_1 & \psi_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on additionne ces équations après les avoir multipliées respectivement une première fois par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, et une seconde par f_1, f_2, f_3, on obtient les deux suivantes :

$$\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & a_1 \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \\ f_3 & \varphi_3 & a_3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} a_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ a_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ a_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & a_1 \\ f_2 & \varphi_2 & a_2 \\ f_3 & \varphi_3 & a_3 \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} f_1 & a_1 & \psi_1 \\ f_2 & a_2 & \psi_2 \\ f_3 & a_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Si, après avoir posé

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix},$$

([1]) *T. de N.*, p. 113. A cet endroit nous considérons les a_i comme des constantes. Il n'est ni plus ni moins général de les regarder comme des fonctions des α_i.

nous convenons de représenter par D_f, D_φ, D_ψ ce que devient ce déterminant lorsqu'on y remplace les f_i, les φ_i ou les ψ_i par les a_i, nous voyons que les équations précédentes peuvent s'écrire

$$D_\psi x - D_f = 0,$$
$$D_\psi y - D_\varphi = 0.$$

Portant les valeurs de x et de y tirées de là dans l'équation du cercle (α_1), nous avons

$$a_1(D_f^2 + D_\varphi^2) + D_\psi(f_1 D_f + \varphi_1 D_\varphi + \psi_1 D_\psi) = 0.$$

Or, on vérifie que

$$f_1 D_f + \varphi_1 D_\varphi + \psi_1 D_\psi = a_1 D.$$

Il vient donc finalement, pour le type des équations représentables au moyen de systèmes de cercles,

$$\text{(IV)} \qquad D_f^2 + D_\varphi^2 + D_\psi D = 0.$$

Il suffit de prendre un ou deux des coefficients a_i égaux à zéro pour avoir, sur le nomogramme, un ou deux systèmes de droites.

Comme exemple d'une telle équation nous citerons la suivante [1] :

$$k^2 + kp \sin\varphi \cos\varphi - \frac{p}{3}\cos^2\varphi = 0,$$

qui se rencontre dans le calcul des murs de soutènement et qui rentre dans le type général (IV) lorsque, faisant correspondre respectivement φ, k et p à α_1, α_2 et α_3, on prend

$$\begin{array}{llll} a_1 \equiv 0, & f_1 \equiv \operatorname{tang}\varphi, & \varphi_1 \equiv -1, & \psi_1 \equiv 0, \\ a_2 \equiv 0, & f_2 \equiv -\frac{1}{3}, & \varphi_2 \equiv k, & \psi_2 \equiv k^2, \\ a_3 \equiv 1, & f_3 \equiv -p, & \varphi_3 \equiv 0, & \psi_3 \equiv 0. \end{array}$$

(1) *T. de N.*, p. 115.

Le nomogramme obtenu, constitué par les droites

$$(\varphi) \qquad x \operatorname{tang} \varphi - y = 0,$$

$$(k) \qquad -\frac{x}{3} + ky + k^2 = 0$$

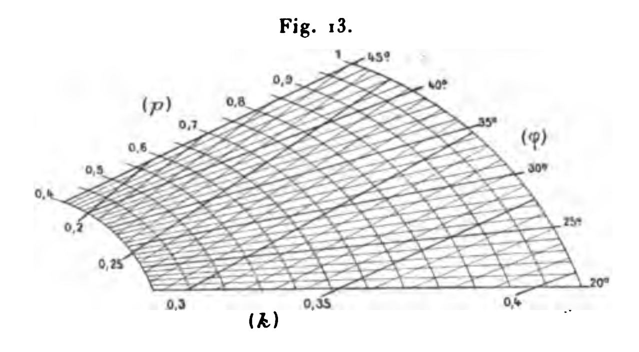
et les cercles

$$(p) \qquad x^2 + y^2 - px = 0,$$

est représenté par la figure 13.

Nous avons fait voir d'ailleurs ([1]) que l'équation quadratique

Fig. 13.



à 3 variables la plus générale est représentable par deux systèmes de droites parallèles et un système de cercles bitangents à une conique, systèmes qui sont réels si la quadrique définie par cette équation a, parallèlement à l'un quelconque des plans de coordonnées, des sections du genre elliptique.

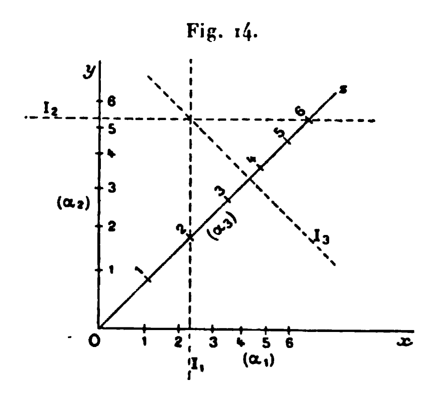
8. *Abaques hexagonaux.* — Lorsque l'équation à 3 variables représentée est du type (I), son abaque se compose de trois systèmes de droites parallèles, respectivement perpendiculaires à Ox, à Oy et à la bissectrice Oz de l'angle xOy. Si l'on inscrit les cotes de ces trois systèmes de parallèles respectivement sur ces trois axes (*fig.* 14), on obtiendra sur ceux-ci les échelles des fonctions

$$x = f_1(\alpha_1), \qquad y = f_2(\alpha_2), \qquad z = \frac{f_3(\alpha_3)}{\sqrt{2}},$$

([1]) *T. de N.*, p. 465.

et l'on pourra ne conserver de l'abaque primitif que ces trois échelles, pourvu que l'on dispose de trois index concourants I_1, I_2, I_3 respecti-

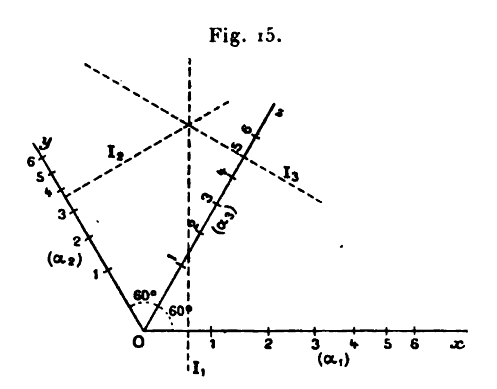
Fig. 14.



vement perpendiculaires à ces trois échelles et pouvant être déplacés *en conservant leur orientation*.

Un tel artifice, proposé en 1881 par M. Blum à l'occasion d'une application particulière, a été, en 1886, imaginé de son côté par M. Lallemand (¹) qui l'a très heureusement complété en prenant pour directions

Fig. 15.



des systèmes (α_1), (α_2) et (α_3) celles des diagonales d'un hexagone régulier (*fig.* 15), ce qui permet de construire l'échelle Oz avec le même

(¹) La contribution personnelle de M. Lallemand comprend, en outre, nombre de remarques sur la disposition des abaques conçus d'après ce principe, qui sont d'un intérêt trop exclusivement pratique pour trouver place ici. Nous renvoyons le lecteur à la section correspondante du *T. de N.* (p. 67 et suiv.).

module que les deux autres. On trouve, en effet, bien aisément que les échelles correspondantes sont, en ce cas, données par

$$x = f_1(\alpha_1), \qquad y = f_2(\alpha_2), \qquad z = f_3(\alpha_3).$$

9. *Équations à plus de trois variables.* — Nous venons de voir que le mode de représentation le plus général d'une équation à trois variables sur un plan consiste dans le contact de points à deux cotes avec des lignes à une cote. Il suffit donc de multiplier le nombre des cotes, suivant ce qui a été vu au n° **3**, pour obtenir la représentation d'équations à un plus grand nombre de variables. Mais on peut se borner à effectuer cette multiplication des cotes pour les lignes mises en contact avec les points à deux cotes. En effet, dans l'enchaînement des systèmes de lignes condensées, qui constitue le nomogramme obtenu comme on vient de le dire, on est toujours libre de considérer deux des systèmes de lignes, situés à une extrémité de la chaîne, comme constituant un réseau de points à deux cotes, et de rattacher, par ramifications successives, toutes les autres cotes figurant sur le Tableau aux lignes en contact avec ce réseau. On peut donc énoncer le principe suivant :

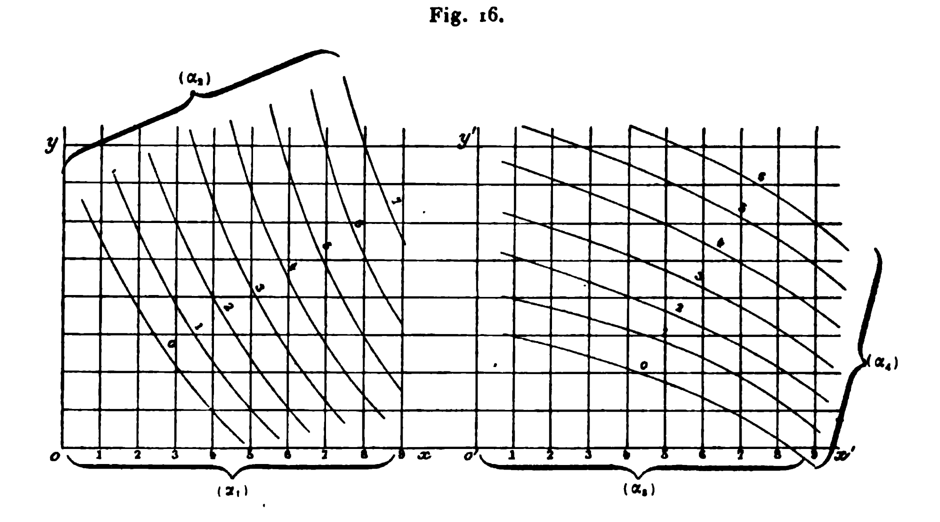
Le mode le plus général de représentation d'une équation à n variables, sur un seul plan, consiste dans le contact de points à 2 cotes avec des lignes à $n - 2$ cotes, lignes qui, à partir de $n = 4$, sont des LIGNES CONDENSÉES.

Il convient de remarquer d'ailleurs que pour passer d'un nomogramme à n variables à un nomogramme à $n+1$ variables il faut munir un des systèmes à une cote du premier, placé à une extrémité de la chaîne, d'un réseau de cotes constitué par deux systèmes de lignes à une cote, dont l'un est arbitraire ainsi qu'on l'a vu au n° **2**. Le nombre des systèmes figurant sur le nomogramme est donc augmenté de 2 et celui des systèmes dont on dispose arbitrairement, de 1. Appliquant cette remarque, à partir de $n = 3$, on peut compléter l'énoncé ci-dessus de la manière suivante :

Le nombre total des systèmes de lignes figurant sur un nomogramme à n variables est égal à $2n - 3$, *dont n systèmes cotés et* $n - 3$ *systèmes de liaison. Sur ces* $2n - 3$ *systèmes,* $n - 1$ *peuvent être choisis arbitrairement.*

En particulier, pour une équation à 4 variables, le mode de représentation le plus général sur un plan consistera dans le contact de points à 2 cotes avec des lignes à 2 cotes. D'autre part, comme sur les 5 systèmes de lignes (4 cotés et 1 de liaison) figurant sur le nomogramme, 3 pourront être choisis arbitrairement, on sera toujours libre de constituer le système de liaison par des parallèles à Ox (1) et l'un des systèmes cotés de chacun des réseaux unis par ce système de liaison, par des parallèles

Fig. 16.



à Oy, de sorte que l'abaque de la figure 16 correspond à l'équation à 4 variables *la plus générale* représentable sur un seul plan. Une telle équation peut, comme on voit, s'écrire

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \varphi(\alpha_3, \alpha_4).$$

(1) En constituant un système de liaison au moyen de droites parallèles, on a l'avantage de pouvoir *ad libitum* faire glisser le long de ce système les réseaux qu'il sert à relier, ce qui permet de mieux dégager les parties distinctes du nomogramme.

En résumé, si l'on examine la façon dont vient d'être indiquée la formation de nomogrammes à plus de 3 variables par substitutions successives à des systèmes à 1 cote de systèmes condensés à 2 cotes, on voit que les équations correspondantes seront construites en prenant une fonction de deux arguments, y remplaçant ceux-ci par des fonctions de deux autres arguments, et ainsi de suite, ce qui montre que *toute équation représentable nomographiquement sur un seul plan doit pouvoir être résolue par une suite finie d'opérations portant chacune sur deux arguments au plus* (¹).

Pour atteindre à des modes plus généraux de représentation il faudra donc trouver le moyen de faire intervenir des systèmes d'éléments à 2 cotes non plus condensés, mais tous distincts; c'est ce à quoi on arrive grâce à l'introduction d'éléments mobiles ainsi qu'on va le voir.

III. — Représentation nomographique sur plusieurs plans mobiles superposés.

10. *Systèmes de lignes à deux cotes engendrés au moyen d'un élément mobile.* — Si toutes les lignes constituant un système à deux cotes peuvent être obtenues par les déplacements, sur le plan du nomogramme, d'une ligne de forme invariable, il est clair qu'il suffira de tracer celle-ci sur un plan transparent superposé au premier pour engendrer le système voulu, à la condition toutefois que le premier plan soit pourvu des repères nécessaires à fixer la position de l'élément mobile pour un couple de valeurs données des cotes correspondantes (²).

(¹) Alors que l'emploi de transformations de Tschirnhausen permet d'étendre ce mode de résolution à des équations algébriques *quelconques* jusqu'au 6ᵉ degré, M. Hilbert, dans une Conférence faite devant le Congrès des Mathématiciens en 1900 (*Compte rendu du Congrès*, p. 91), a proposé de démontrer qu'il ne saurait avoir lieu pour le 7ᵉ degré. Ainsi qu'on le verra plus loin (nº 15) l'adjonction d'une simple droite mobile permet de résoudre nomographiquement les équations du 7ᵉ degré.

(²) Il y a lieu d'établir une distinction entre les éléments mobiles, tels, par exemple, que le transparent à index servant à la lecture des abaques hexagonaux (nº 8), qui remplacent des systèmes simplement infinis ou condensés, et ceux qui permettent d'engendrer des

Un premier exemple, qui se présente immédiatement à l'esprit, est celui d'un système de cercles de même rayon, à deux cotes. Les centres de ces cercles forment en effet un système de points à deux cotes, défini sur le plan fixe par un réseau (n° 2). Il suffit dès lors de tracer sur le plan transparent mobile un cercle du rayon donné, avec son centre, pour lui faire prendre la position correspondant à un couple de cotes données en amenant son centre en coïncidence avec le point du réseau défini par ces deux cotes.

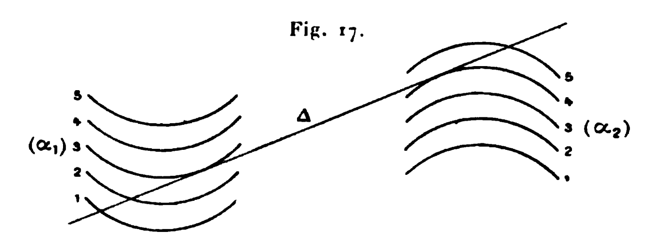
Grâce à l'introduction d'un élément mobile, il sera également possible d'engendrer un système de droites à deux cotes absolument quelconque.

Soit, en effet, le système le plus général défini par l'équation

$$x f(\alpha_1, \alpha_2) + y \varphi(\alpha_1, \alpha_2) + \psi(\alpha_1, \alpha_2) = 0.$$

Suivant que, dans cette équation, on fait varier α_2 en laissant α_1 fixe, ou réciproquement, on obtient pour la droite correspondante une enveloppe cotée au moyen de la valeur fixe correspondante et que nous représenterons, dès lors, par (α_1) dans un cas, par (α_2) dans l'autre.

Fig. 17.



Ces deux systèmes d'enveloppes (α_1) et (α_2) pourront être figurés sur le plan (*fig.* 17). Si donc on applique sur ce plan un transparent sur lequel est tracée une droite Δ [1], de façon que cette droite soit tangente à la fois

systèmes doublement infinis non condensés. Les premiers introduisent plus de simplicité et de netteté dans la construction et la lecture de certains nomogrammes, qu'il est d'ailleurs possible de construire sans avoir recours à leur emploi; les seconds permettent d'établir certains modes de représentation qui seraient *impossibles* sans leur intervention.

[1] Cette droite mobile pourra être réalisée matériellement de toute autre façon, en particulier, au moyen d'un fil tendu; mais, pour plus de commodité dans le mode d'exposition, *nous regarderons toujours l'élément mobile, quel qu'il soit, comme appartenant à un plan glissant sur le premier.*

à la courbe (α_1) et à la courbe (α_2), elle coïncidera avec la droite (α_1, α_2) définie par l'équation ci-dessus.

Un dernier exemple nous sera fourni par les *images logarithmiques* de M. Mehmke.

L'image logarithmique de la fonction

$$y = f(x)$$

est la courbe obtenue en transformant celle qui représente cette fonction dans le système cartésien, au moyen des formules

$$Y = \log y, \qquad X = \log x.$$

C'est, en d'autres termes, la courbe dont l'équation est

$$e^Y = f(e^X).$$

En particulier, l'image logarithmique du binome

$$y = px^m + qx^n$$

est la courbe définie par

$$e^Y = pe^{mX} + qe^{nX}.$$

Ces courbes, lorsqu'on y regarde p et q comme des paramètres arbitraires, constituent un système doublement infini non condensé. M. Mehmke a remarqué que *toutes ces images* (p, q) *peuvent être obtenues par translation d'une même courbe* ([1]).

Considérons, en effet, sur le plan mobile $O'X'Y'$ *dont les axes restent parallèles à ceux de* OXY, la courbe C′ définie par

$$e^{Y'} = e^{mX'} + e^{nX'}.$$

([1]) Pour plus de généralité sur la théorie des images logarithmiques, voir *T. de N.*, p. 376 et suiv.

Nous allons démontrer que, *lorsque les droites* D'_1 *et* D'_2 *du plan* O'X'Y', *qui ont pour coefficients angulaires m et n, passent respectivement par les points*

$$x = 0, \qquad y = \log p,$$

et

$$x = 0, \qquad y = \log q,$$

du plan OXY, *la courbe* C' *coïncide avec l'image* (p, q).

Si nous appelons ξ et η les coordonnées de O' par rapport à OXY, nous voyons que les équations de C', D'_1 et D'_2 par rapport à ces mêmes axes, sont

$$e^{(Y-\eta)} = e^{m(X-\xi)} + e^{n(X-\xi)},$$

$$Y - \eta = m(X - \xi);$$

$$Y - \eta = n(X - \xi).$$

Ces deux dernières droites ayant respectivement pour ordonnées à l'origine $\log p$ et $\log q$, on a

$$\log p - \eta = -m\xi,$$

$$\log q - \eta = -n\xi.$$

Portant les valeurs de η et de ξ tirées de là dans l'équation de la courbe C' prise sur OXY, on a

$$e^{Y-\log\left(\frac{p^n}{q^m}\right)^{\frac{1}{n-m}}} = e^{m\left[X-\log\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{n-m}}\right]} + e^{n\left[X-\log\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{n-m}}\right]},$$

ou, en multipliant les deux membres par $e^{\log\left(\frac{p^n}{q^m}\right)^{\frac{1}{n-m}}}$,

$$e^{Y} = e^{mX+\log p} + e^{nX+\log q},$$

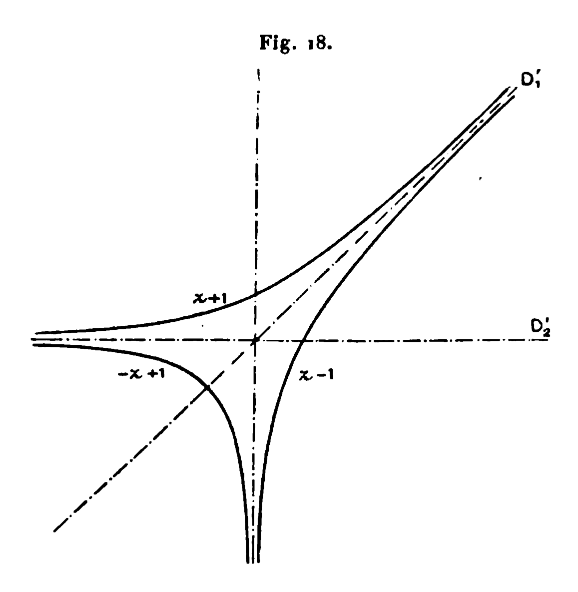
c'est-à-dire

$$e^{Y} = pe^{mX} + qe^{nX},$$

ce qui établit la proposition.

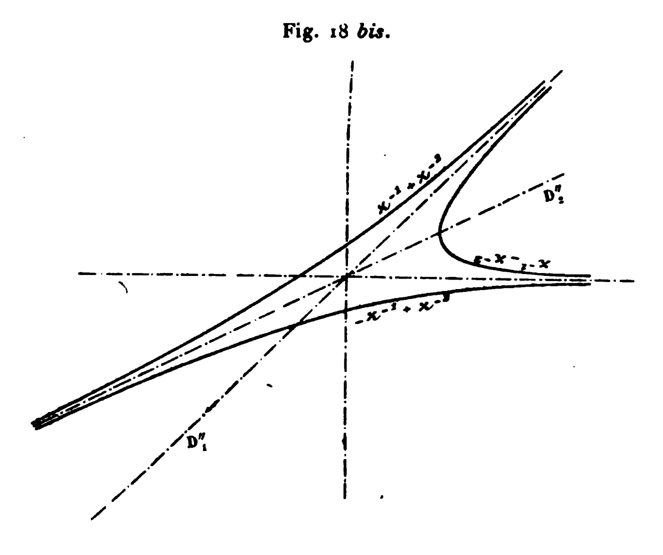
Remarquons que les ordonnées à l'origine des droites D'_1 et D'_2 qui définissent la position de la courbe (p, q), étant données par $\log p$ et $\log q$, on ne peut prendre p ni q négatifs. On doit donc considérer à part les

Fig. 18.



images des binomes différant entre eux par les signes de leurs termes. Ainsi la figure 18 montre les images logarithmiques des binomes $x+1$,

Fig. 18 *bis*.



$x-1$ et $-x+1$ avec les index D'_1 et D'_2 correspondants, la figure 18 *bis*

celles des binomes $x^{-1}+x^{-2}$, $x^{-1}-x^{-2}$, $-x^{-1}+x^{-2}$ avec les index D''_1 et D''_2 correspondants.

Ces quelques exemples ayant fait ressortir l'avantage de l'introduction d'éléments mobiles, d'où découle la possibilité de faire usage de systèmes cotés non représentables d'une façon permanente sur un plan, nous allons chercher à déterminer le mode de représentation le plus général résultant de l'adjonction au plan fixe d'un plan mobile portant également des éléments, cotés ou non, et pouvant glisser sur le premier d'une façon quelconque ([1]).

11. *Structure générale d'un nomogramme à deux plans.* — Si deux plans π et π' sont superposés l'un à l'autre, leurs déplacements relatifs comportent trois degrés de liberté. Or, un contact établi entre un élément E appartenant au plan π et un élément E′ appartenant au plan π' équivaut à une condition. Il faut donc la simultanéité de trois tels contacts pour fixer la position de l'un des plans par rapport à l'autre. Une fois cette fixation obtenue, au moyen des trois contacts, dits *de position*, établis respectivement entre les éléments E_1, E_2, E_3 du plan π, et E'_1, E'_2, E'_3 du plan π', on pourra constater le contact, dit *de résolution*, entre les éléments E_4 et E'_4 pris respectivement sur l'un et l'autre plan. Le mode d'emploi du nomogramme ainsi constitué pourra donc se schématiser dans la suite de symboles

$$E_1^{(n_1)} \mapsto E_1'^{(n'_1)}, \qquad E_2^{(n_2)} \mapsto E_2'^{(n'_2)}, \qquad E_3^{(n_3)} \mapsto E_3'^{(n'_3)}, \qquad E_4^{(n_4)} \mapsto E_4'^{(n'_4)},$$

les indices supérieurs exprimant, en vertu de la convention posée au n° **4**,

---

([1]) Nous répétons que même si l'élément mobile est réduit à une simple droite nous le supposons tracé sur un plan indéfini superposé au premier (transparent en général, par conséquent). Si les déplacements utiles du plan mobile se réduisent à une translation de direction fixe, ou à une rotation de centre fixe, on pourra le réaliser matériellement au moyen d'une réglette, ou d'un disque, à glissière. C'est le cas des règles et des cercles à calcul qui, au point de vue général où nous nous sommes placés, appartiennent à la catégorie des nomogrammes.

le nombre des cotes afférentes aux divers éléments en présence. Si donc

$$n_1 + n'_1 + n_2 + n'_2 + n_3 + n'_3 + n_4 + n'_4 = n,$$

ce nomogramme s'appliquera à un certain type d'équation à n variables.

Cette façon d'établir le type général des nomogrammes à deux plans appelle les remarques essentielles que voici :

1° Le mode de représentation réalisé par un tel nomogramme tenant à la simultanéité des quatre contacts symbolisés ci-dessus, on peut indifféremment prendre trois d'entre eux comme contacts de position et le quatrième comme contact de résolution et, par conséquent, l'une quelconque des variables correspondant aux diverses cotes peut être prise pour inconnue ([1]).

2° La coïncidence de deux points P et P′ ou de deux droites D et D′, appartenant à l'un et à l'autre plan, équivaut à deux contacts, car, dans un cas, on peut considérer que deux lignes du plan π' passant par le point P′ sont en contact avec le point P du plan π, dans l'autre, que deux points du plan π' situés sur la droite D′ sont en contact avec la droite D du plan π. Pour rappeler qu'une telle coïncidence équivaut à un double contact, nous écrirons donc

$$P \between P' \quad \text{ou} \quad D \between D'.$$

3° Prenant pour contacts de position ceux qui sont numérotés 1, 2, 4, et, par suite, pour contact de résolution celui qui est numéroté 3, supposons que les éléments E'_1, E'_2, E'_3 soient trois cercles concen-

([1]) On peut, exceptionnellement, faire correspondre sur un nomogramme plusieurs systèmes cotés à une même variable, et, par suite, faire correspondre à une équation à n variables un nomogramme à $n+p$ systèmes cotés; mais il est essentiel de remarquer qu'*on ne peut prendre pour inconnue qu'une variable à laquelle ne correspond qu'un seul système coté*. C'est ainsi par exemple que l'équation $z^3 + pz + q = 0$ pourra être représentée par un abaque hexagonal si l'on fait correspondre une échelle simple au premier et au troisième terme et une échelle binaire au second; mais un tel abaque, sur lequel z figurerait dans la première et la troisième échelle, ne saurait se prêter au calcul de cette variable prise pour inconnue.

triques Γ'_1, Γ'_2, Γ'_3 (qui pourront être confondus en un seul Γ') ou trois droites parallèles Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3 (qui pourront être confondues en une seule Δ'). On voit que, une fois les deux premiers contacts établis, le seul déplacement possible de π' par rapport à π est, dans un cas, une rotation dans laquelle le cercle Γ'_3 tourne sur lui-même, dans l'autre, une translation dans laquelle la droite Δ'_3 glisse sur elle-même, et, par conséquent, que le contact numéroté 3 a lieu, dans l'un et l'autre cas, *quel que soit le contact numéroté 4 qui peut, dès lors, être laissé indéterminé.* La notation du nomogramme devient en ce cas

$$E_1 \mapsto \Gamma'_1, \qquad E_2 \mapsto \Gamma'_2, \qquad E_3 \mapsto \Gamma'_3, \qquad \text{»} \mapsto \text{»},$$

et nous dirons que ce nomogramme appartient à une *variété réduite.*

L'indétermination introduite par la simultanéité de trois contacts dans lesquels interviennent des Γ' ou des Δ' peut d'ailleurs se traduire encore d'une autre façon. Les deux premiers contacts limitant les déplacements possibles à une rotation ou à une translation, si un troisième élément Γ'_3 ou Δ'_3 est en contact *à la fois* avec les éléments E_3 et E_4, il ne cessera pas de l'être pour l'un ou l'autre de ces déplacements possibles. Dès lors, au lieu de prendre pour Γ'_3 ou Δ'_3, comme on vient de le faire, un élément déterminé *a priori* du système (Γ') ou (Δ'), on peut précisément le déterminer dans ce système par la condition d'être *en contact avec* E_3 *une fois les deux premiers contacts établis.* Pour rappeler que c'est un des contacts dans lesquels intervient cet élément qui le détermine dans le système auquel il appartient, nous mettrons sa lettre représentative entre crochets. Nous aurons ainsi un mode de représentation qui se dénotera ([1])

$$E_1 \mapsto \Gamma'_1, \qquad E_2 \mapsto \Gamma'_2, \qquad E_3 \mapsto [\Gamma'_3], \qquad E_4 \mapsto [\Gamma'_3].$$

([1]) On pourra de même identifier les éléments Γ'_1 et Γ'_2 et déterminer à volonté la position soit au moyen de Γ'_1, soit au moyen de Γ'_3. Pour marquer cette réciprocité, nous placerons également Γ'_1 entre crochets. Si nous prenons ainsi deux droites Δ'_1 et Δ'_3 dans un système parallèle et si nous les mettons en contact respectivement avec les points à une cote P_1 et P_2 d'une part, P_3 et P_4 de l'autre, nous obtenons le type de nomogramme à *paral-*

4° Enfin il est intéressant d'envisager à part les nomogrammes sur lesquels n'interviennent comme éléments cotés que des *points à une cote,* en raison de la plus grande netteté et de la plus grande facilité d'interpolation qu'ils offrent. Ces points à une cote doivent alors être mis en contact avec des lignes sans cote ou *lignes constantes*. De tels nomogrammes seront dits appartenir à une *variété ponctuelle.*

12. *Formation des types canoniques de nomogrammes à deux plans pour équations à n variables.* — Si, pour simplifier l'écriture, nous représentons chacun des huit éléments intervenant dans un nomogramme général à deux plans, simplement par le nombre des cotes y afférentes, nous voyons que la notation symbolique de ce nomogramme sera la suivante :

$$n_1 \mapsto n'_1, \qquad n_2 \mapsto n'_2, \qquad n_3 \mapsto n'_3, \qquad n_4 \mapsto n'_4.$$

Dès lors, pour avoir tous les types de nomogrammes à deux plans pour n variables, distincts, par la répartition des cotes entre les huit éléments en présence, il faut trouver toutes les solutions entières positives ou nulles (un élément sans cote étant dit *constant*) de l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=4} (n_i + n'_i) = n,$$

satisfaisant aux conditions que voici :

1° On ne doit pas pouvoir passer de l'une à l'autre de ces solutions par échange de deux des quatre couples n_i, n'_i (ce qui reviendrait à changer simplement le numérotage des contacts), ou par inversion simultanée de l'ordre des nombres n_i et n'_i entrant dans chaque couple (ce qui reviendrait à interchanger les deux plans superposés).

---

lèles mobiles de M. Beghin (*T. de N.*, p. 241) qui, d'après la convention ci-dessus, se dénote

$$P_1 \mapsto [\Delta'_1], \qquad P_2 \mapsto [\Delta'_1], \qquad P_3 \mapsto [\Delta'_3], \qquad P_4 \mapsto [\Delta'_3].$$

2° Aucune solution ne doit contenir *trois* couples composés de deux zéros, attendu que trois contacts entre éléments constants rendent les deux plans invariables l'un par rapport à l'autre, et, par suite, réduisent le nomogramme à un seul plan.

Le dénombrement de ces solutions constitue un problème difficile de partition qui a été résolu par le major Mac-Mahon ([1]); et l'on peut, comme nous l'avons fait précédemment ([2]), fonder une classification des nomogrammes à deux plans, pour chaque nombre de variables, sur la considération des solutions qui viennent d'être définies.

Nous allons avoir recours ici à un autre mode de classification, qui se lie peut-être plus étroitement à l'essence même du sujet ([3]). Ce mode de classification n'envisage que la répartition, parmi les huit éléments en présence, de ceux qui sont *cotés* et de ceux qui ne le sont pas, et qui sont dits *constants*. C'est, en effet, là ce qui caractérise véritablement la structure du nomogramme. Il suffit ensuite, dans chaque type obtenu, et qui peut être dit *type canonique*, de faire varier les nombres de cotes des éléments cotés pour engendrer des nomogrammes applicables à un nombre quelconque de variables ([4]).

Le nombre des éléments cotés ne pouvant être inférieur à deux ni supérieur à huit, nous allons lui donner successivement chacune des valeurs contenues dans cet intervalle, et, en représentant par o un élément con-

---

([1]) *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXVI, p. 56. La solution donnée à cet endroit ne tient pas compte de la seconde condition limitative énoncée ci-dessus, qui n'avait pas été posée à l'auteur, et, par suite, le nombre N de types obtenu dans cette solution, pour le cas de n variables, doit être diminué de $e\left(\frac{n}{2}\right)+1$, nombre des partitions à deux termes du nombre n :

Pour $n =$	2,	3,	4,	5,	6,	7,	...,
on a N =	2,	5,	16,	29,	64,	110,	....

([2]) *T. de N.*, p. 403 et suiv.

([3]) Nous avons proposé ce mode de classification dans une Note spéciale (*Comptes rendus*, t. CXXXVI, 1903, p. 33).

([4]) Par exemple, grâce à cette classification, tous les nomogrammes à points alignés rentrent dans un type unique, celui qui est désigné plus loin par $(3_1)_{rp}$, alors qu'avec la classification précédente ils se rattachaient, suivant le nombre des variables y intervenant, dans des types distincts : IV_3^2 pour trois variables, VII_4^2 pour quatre variables, etc.

stant (c'est-à-dire à o cote) quelconque, former pour chacune de ces valeurs tous les modes *distincts* de répartition des o en tenant compte des conditions formulées ci-dessus.

Chaque type canonique ainsi formé étant représenté par un chiffre gras indiquant le nombre des éléments cotés y intervenant, affecté d'un indice d'ordre lorsque ce nombre donne lieu à plusieurs solutions, voici le Tableau complet de tous ces types, au nombre de dix-neuf [1] :

($\mathbf{2}_1$)	$n_1 \vdash\!\dashv o$	$n_2 \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv o$	(R, P)
($\mathbf{2}_2$)	$n_1 \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv n'_2$	$o \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv o$	(R, P)
($\mathbf{3}_1$)	$n_1 \vdash\!\dashv o$	$n_2 \vdash\!\dashv o$	$n_3 \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv o$	(R, P)
($\mathbf{3}_2$)	$n_1 \vdash\!\dashv n'_1$	$n_2 \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv o$	(R)
($\mathbf{3}_3$)	$n_1 \vdash\!\dashv o$	$n_2 \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv n'_3$	$o \vdash\!\dashv o$	(R, P
($\mathbf{4}_1$)	$n_1 \vdash\!\dashv o$	$n_2 \vdash\!\dashv o$	$n_3 \vdash\!\dashv o$	$n_4 \vdash\!\dashv o$	(P)
($\mathbf{4}_2$)	$n_1 \vdash\!\dashv n'_1$	$n_2 \vdash\!\dashv o$	$n_3 \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv o$	(R)
($\mathbf{4}_3$)	$n_1 \vdash\!\dashv o$	$n_2 \vdash\!\dashv o$	$n_3 \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv n'_4$	(P)
($\mathbf{4}_4$)	$n_1 \vdash\!\dashv n'_1$	$n_2 \quad n'_2$	$o \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv o$	(R)
($\mathbf{4}_5$)	$n_1 \vdash\!\dashv n'_1$	$n_2 \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv n'_3$	$o \vdash\!\dashv o$	(R)
($\mathbf{4}_6$)	$n_1 \vdash\!\dashv o$	$n_2 \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv n'_3$	$o \vdash\!\dashv n'_4$	(P)
($\mathbf{5}_1$)	$n_1 \vdash\!\dashv n'_1$	$n_2 \vdash\!\dashv o$	$n_3 \vdash\!\dashv o$	$n_4 \vdash\!\dashv o$	
($\mathbf{5}_2$)	$n_1 \vdash\!\dashv n'_1$	$n_2 \vdash\!\dashv n'_2$	$n_3 \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv o$	(R)
($\mathbf{5}_3$)	$n_1 \vdash\!\dashv n'_1$	$n_2 \vdash\!\dashv o$	$n_3 \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv n'_4$	
($\mathbf{6}_1$)	$n_1 \vdash\!\dashv n'_1$	$n_2 \vdash\!\dashv n'_2$	$n_3 \vdash\!\dashv o$	$n_4 \vdash\!\dashv o$	
($\mathbf{6}_2$)	$n_1 \vdash\!\dashv n'_1$	$n_2 \vdash\!\dashv n'_2$	$n_3 \vdash\!\dashv n'_3$	$o \vdash\!\dashv o$	(R)
($\mathbf{6}_3$)	$n_1 \vdash\!\dashv n'_1$	$n_2 \vdash\!\dashv n'_2$	$n_3 \vdash\!\dashv o$	$o \vdash\!\dashv n'_4$	
($\mathbf{7}$)	$n_1 \vdash\!\dashv n'_1$	$n_2 \vdash\!\dashv n'_2$	$n_3 \vdash\!\dashv n'_3$	$n_4 \vdash\!\dashv o$	
($\mathbf{8}$)	$n_1 \vdash\!\dashv n'_1$	$n_2 \vdash\!\dashv n'_2$	$n_3 \vdash\!\dashv n'_3$	$n_4 \vdash\!\dashv n'_4$	

Ce Tableau appelle quelques observations.

---

[1] On pourrait rattacher à ce Tableau le type général des nomogrammes à un seul plan, défini au n° **9**, en lui faisant correspondre la notation

($\mathbf{2}_0$) $\quad 2 \vdash\!\dashv n-2 \quad o \vdash\!\dashv o \quad o \vdash\!\dashv o \quad o \vdash\!\dashv o.$

En premier lieu, il est clair que *tous les nomogrammes à deux plans pour n variables sont compris dans les types dont le nombre des éléments cotés est au plus égal à n*. Par exemple, pour le cas de quatre variables on aura tous les types du Tableau ci-dessus jusqu'à ($\mathbf{4}_6$) inclusivement.

Les types de nomogrammes comportant la *variété réduite*, définie dans la troisième remarque du n° **11**, sont évidemment ceux sur lesquels figure un contact entre éléments constants, ce contact pouvant être rendu indéterminé si l'on choisit les trois éléments de l'un des deux plans, intervenant dans les trois autres contacts, dans un système (Γ) ou (Δ). Ces types sont indiqués sur le Tableau ci-dessus par la lettre R mise entre parenthèses au bout de la ligne. Nous les distinguerons par la lettre r ajoutée en indice extérieur, par exemple, $(\mathbf{3}_1)_r$.

Enfin ceux qui, en vertu de la quatrième remarque du n° **11**, sont susceptibles de la *variante ponctuelle*, lorsque tous les nombres de cotes y entrant sont pris égaux à 1, sont désignés par la lettre P mise aussi entre parenthèses au bout de la ligne. Nous les distinguerons par la lettre p placée en indice en dehors de la parenthèse. Par exemple $(\mathbf{3}_1)_p$, $(\mathbf{3}_1)_{rp}$.

Il est intéressant d'envisager à part les nomogrammes sur lesquels l'élément mobile se réduit à une simple droite. Celle-ci devant être considérée comme une Δ, le type correspondant doit être de variété réduite; d'autre part, cette Δ étant un élément constant, il faut que les nombres de cotes correspondants soient o. En d'autres termes, les nomogrammes cherchés ne peuvent appartenir qu'aux variétés réduites des trois premiers types ci-dessus. Les deux premières s'appliquant à des équations à deux variables n'ont à être envisagées, en quelque sorte, que pour mémoire. La troisième, qui s'applique à des équations à trois variables, est d'un plus haut intérêt.

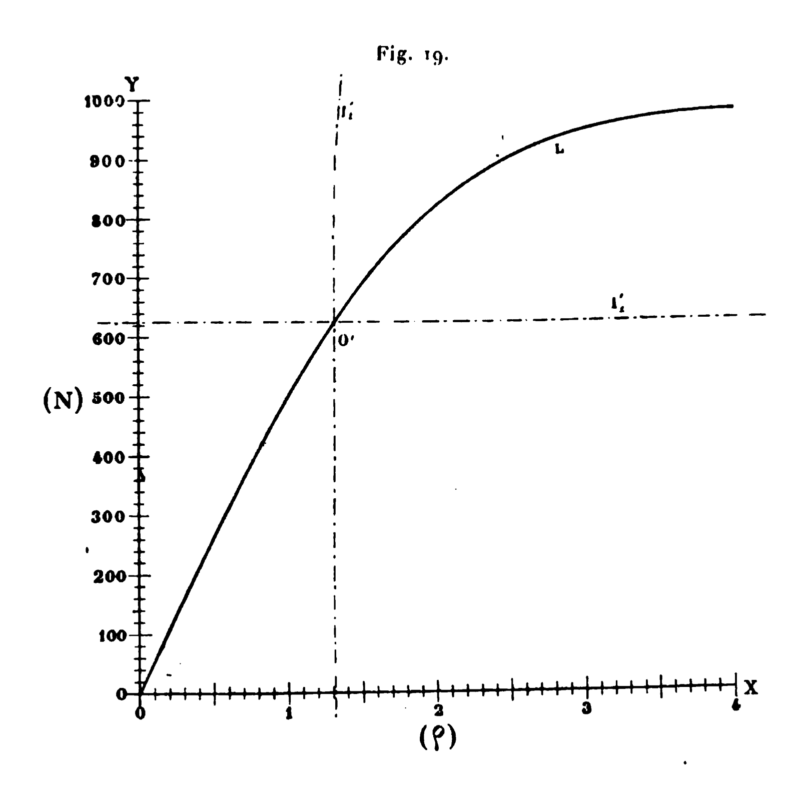
Sa variété ponctuelle est constituée par les nomogrammes à *points alignés* sur lesquels nous nous étendrons plus loin (n° **14**).

13. *Équations à deux et à trois variables.* — Pour les équations à

deux et à trois variables, la représentation sur un seul plan s'appliquant, comme nous l'avons vu, à une équation *quelconque*, l'introduction d'un plan mobile ne peut avoir pour objet d'atteindre des cas autrement insolubles, ce qui aura lieu, au contraire, à partir de quatre variables. Mais cette introduction du plan mobile aura l'avantage de conduire, dans nombre de cas, à des solutions pratiquement plus satisfaisantes que celles offertes par un seul plan.

Pour ce qui concerne le cas de deux variables, on obtient des exemples de nomogrammes à deux plans en remplaçant, sur un abaque du type donné par la figure 8 ci-dessus, l'ensemble des deux systèmes de

Fig. 19.



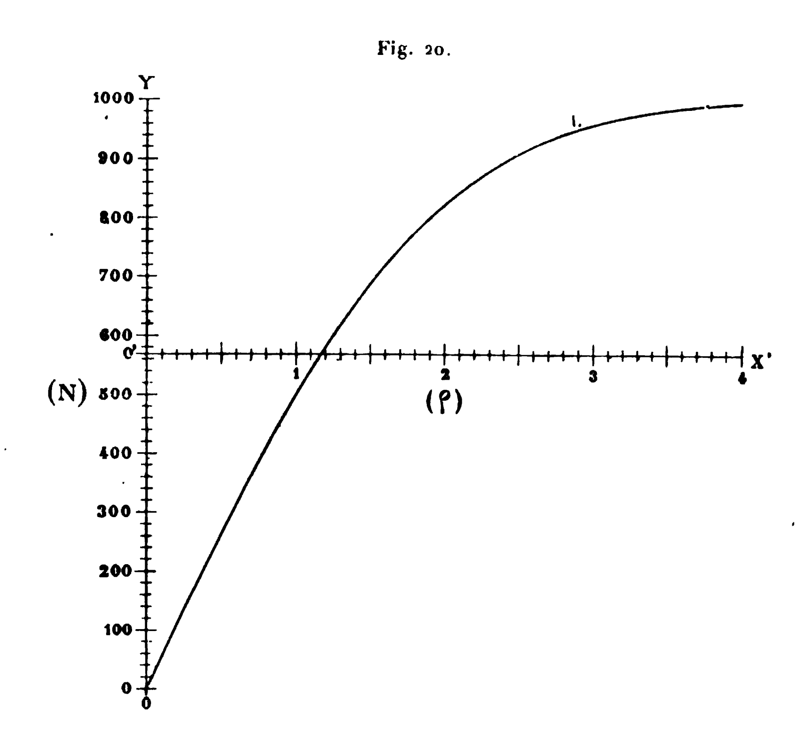
parallèles aux axes, soit par deux index I'_1 et I'_2 tracés sur un transparent d'orientation constante, et perpendiculaires respectivement aux axes gradués OX et OY (*fig.* 19), soit par un index mobile O'X' perpendiculaire à OY et portant la graduation de OX (*fig.* 20).

Si, dans le premier cas, on appelle O′ le point commun à I'_1 et I'_2, et Y_∞ le point à l'infini sur OY, on voit que la notation du nomogramme est

$$(\alpha_1) \mapsto I'_1, \quad (\alpha_2) \mapsto I'_2, \quad L \mapsto O', \quad Y_\infty \mapsto I'_1,$$

qui rentre dans le type ($\mathbf{2}_1$) ci-dessus.

Fig. 20.



Dans le second cas, X_∞ étant de même le point à l'infini sur OX, on a la notation

$$(\alpha_2) \mapsto O'X', \quad L \mapsto (\alpha_1)', \quad OY \mapsto O', \quad X_\infty \mapsto O'X',$$

qui rentre dans le type ($\mathbf{2}_2$), et il est bien évident qu'une équation *quelconque* à deux variables est représentable de l'une ou l'autre façon.

De même, les types (**3**) conduisent à des modes généraux de représentation des équations à trois variables lorsqu'on y laisse indéterminé un des trois éléments cotés en contact. On peut s'en rendre compte de la manière suivante :

Si l'on considère tous les couples de valeurs des variables α_1 et α_2 correspondant à une valeur donnée de la variable α_3 en vertu de l'équation considérée, les éléments cotés correspondant à l'un de ces couples, joints à quatre éléments constants, permettent de constituer les trois contacts de position ainsi que l'élément E', du plan π', qui devra être mis en contact avec l'élément encore indéterminé (α_3) du plan π, lequel élément E' occupe ainsi, sur le plan π, une position bien déterminée. L'enveloppe de ces positions (ou leur lieu, si l'élément E' se réduit à un point), lorsqu'on envisage tous les couples (α_1, α_2) répondant à la valeur α_3 considérée, donne précisément l'élément (α_3) cherché.

Il est facile de former des exemples de tels nomogrammes généraux pour les trois types (**3**).

Si, notamment, on construit pour chaque valeur de α_3 un nomogramme du type de la figure 19, on obtient un système de lignes (α_3) remplaçant la seule ligne constante L, et la notation du nomogramme devenant

$$(\alpha_1) \mapsto I'_1, \quad (\alpha_2) \mapsto I'_2, \quad (\alpha_3) \mapsto O', \quad Y_\infty \mapsto I'_1,$$

on voit qu'il rentre dans le type ($\mathbf{3}_1$) [1].

Lorsque les lignes (α_3) sont des droites parallèles, il suffit de les remplacer aussi par un index I'_3 mis en contact avec l'échelle (α_3), perpendiculaire à sa direction, pour obtenir, avec des axes à 120°, les abaques hexagonaux (n° **8**), qui rentrent dès lors dans le type ($\mathbf{3}_1$).

Si, de même, pour chaque valeur de (α_3) on construit un nomogramme du type de la figure 20, on obtient un nomogramme qui se dénote

$$(\alpha_2) \mapsto O'X', \quad (\alpha_3) \mapsto (\alpha_1)', \quad OY \mapsto O', \quad X_\infty \mapsto O'X',$$

et qui rentre dans le type ($\mathbf{3}_2$) [2].

---

[1] Les échelles centrales additionnelles des abaques hexagonaux de M. Lallemand pour le calcul des profils de remblai et de déblai appartiennent à ce type spécial (*T. de N.*, p. 281).

[2] Comme exemple du type ($\mathbf{3}_2$) on peut encore citer les abaques polaires de M. G. Pesci (*T. de N.*, p. 119 à 122).

Supposons enfin que le transparent porte des lignes (α_3), dont l'équation rapportée à I'_1 et I'_2, pris comme axes $O'X'$ et $O'Y'$, soit

$$f(X', Y', \alpha_3) = 0.$$

Si nous faisons passer $O'X'$ et $O'Y'$ respectivement par les points $y = -\alpha_2$ et $x = -\alpha_1$ des axes OY et OX, nous avons pour l'équation des lignes (α_3) rapportées à OX et OY,

$$f(X + \alpha_1, Y + \alpha_2, \alpha_3) = 0,$$

et, par suite, pour celle de ces lignes qui passe par l'origine O,

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0.$$

On obtient ainsi, pour cette dernière équation, un nomogramme qui se dénote

$$(\alpha_1) \vdash O'Y', \quad (\alpha_2) \vdash O'X', \quad O \vdash (\alpha_3)', \quad X_\infty \vdash O'X',$$

et qui appartient, par suite, au type $(\mathbf{3}_3)$.

14. *Nomogrammes à points alignés* [1]. — Ainsi que nous venons

---

[1] *T. de N.*, Chap. III. A la suite du Mémoire, paru en 1884, dans lequel nous formulions pour la première fois le principe de cette méthode, les applications s'en sont multipliées de telle façon que nous avons été amené, pénétrant dans les moindres détails, à lui consacrer dans notre Traité un Chapitre tout entier, illustré d'exemples d'application ayant été tous déjà mis à l'épreuve de la pratique.

Il est d'ailleurs remarquable qu'en dépit de la particularisation relative du type des équations auxquelles elle s'applique cette méthode s'est trouvée propre à rendre d'importants services pour la représentation de certaines lois empiriques (*loc. cit.*, section IV), et même pour la détermination de la forme analytique qui pouvait leur être donnée (*loc. cit.*, n° 87).

Récemment, le capitaine Lafay en a fait une remarquable application à l'équation de Van der Waals (Feuilles autographiées du *Cours de Physique* de la première division de l'École Polytechnique en 1902-1903, p. 24 à 28).

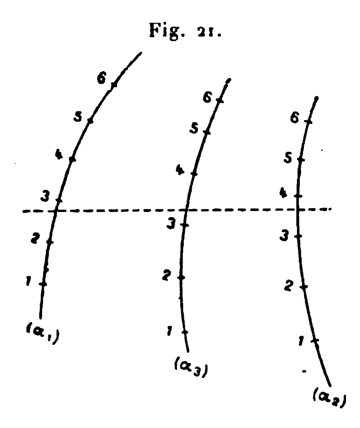
De nombreux exemples d'application se rencontrent encore dans le Mémoire de M. Soreau, cité plus loin à propos des nomogrammes à double alignement.

Comme vaste ensemble d'applications de ce genre, nous citerons encore le *Manuale del*

d'en faire la remarque, le principal intérêt de l'emploi d'un élément mobile, lorsque les variables ne sont qu'au nombre de trois, est de conduire, dans des cas spéciaux, à des solutions plus avantageuses que celles où n'intervient qu'un seul plan. C'est ainsi que, lorsque cette introduction permet d'obtenir une variété ponctuelle, il y a lieu d'y recourir, la netteté d'un tel nomogramme étant très supérieure à celle d'un abaque où s'entrecroisent plusieurs systèmes de lignes cotées, et l'interpolation à vue s'y faisant avec une bien plus grande précision.

Or, ainsi que nous l'avons vu à la fin du n° **12**, la variété ponctuelle la plus simple dans le cas de trois variables est celle qu'on obtient au moyen

Fig. 21.



d'une seule droite mobile, c'est-à-dire celle qui est constituée par *trois systèmes de points à une cote entre lesquels on prend des alignements* (*fig.* 21). Sa désignation, en vertu de la convention faite au n° **12**, est $(\mathbf{3}_1)_{rp}$.

Il est bien clair que le type le plus général d'équation ainsi représentable est celui que nous avons déjà rencontré au n° **6** et que nous récrivons ici :

$$\text{(III)} \qquad \begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & \varphi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) \\ f_3(\alpha_3) & \varphi_3(\alpha_3) & \psi_3(\alpha_3) \end{vmatrix} = 0,$$

Tiro du capitaine de frégate Ronca, de la marine italienne, qui, pour la construction de ses nombreux nomogrammes à points alignés, a eu recours à l'utile collaboration du professeur G. Pesci, auteur d'un excellent résumé de Nomographie par lequel se termine l'Ouvrage (Livorno; P. Giusti; 1901).

une telle équation exprimant l'alignement des trois points $(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3)$, dont les coordonnées homogènes sont :

$$\begin{array}{lll} x = f_1(\alpha_1), & y = \varphi_1(\alpha_1), & t = \psi_1(\alpha_1), \\ x = f_2(\alpha_2), & y = \varphi_2(\alpha_2), & t = \psi_2(\alpha_2), \\ x = f_3(\alpha_3), & y = \varphi_3(\alpha_3), & t = \psi_3(\alpha_3), \end{array}$$

et, plus généralement, par transformation homographique [1], des trois points

$$\begin{array}{lll} x = \lambda_0 f_1 + \mu_0 \varphi_1 + \nu_0 \psi_1, & y = \lambda'_0 f_1 + \mu'_0 \varphi_1 + \nu'_0 \psi_1, & t = \lambda''_0 f_1 + \mu''_0 \varphi_1 + \nu''_0 \psi_1, \\ x = \lambda_0 f_2 + \mu_0 \varphi_2 + \nu_0 \psi_2, & y = \lambda'_0 f_2 + \mu'_0 \varphi_2 + \nu'_0 \psi_2, & t = \lambda''_0 f_2 + \mu''_0 \varphi_2 + \nu''_0 \psi_2, \\ x = \lambda_0 f_3 + \mu_0 \varphi_3 + \nu_0 \psi_3, & y = \lambda'_0 f_3 + \mu'_0 \varphi_3 + \nu'_0 \psi_3, & t = \lambda''_0 f_3 + \mu''_0 \varphi_2 + \nu''_0 \psi_3, \end{array}$$

les paramètres λ, μ, ν étant quelconques, mais tels toutefois que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_0 & \mu_0 & \nu_0 \\ \lambda'_0 & \mu'_0 & \nu'_0 \\ \lambda''_0 & \mu''_0 & \nu''_0 \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Les formes les plus fréquentes de l'équation (III) sont d'ailleurs les formes (I) et (II) du n° **12** [2], savoir :

$$\text{(I)} \qquad f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) = f_3(\alpha_3)$$

et

$$\text{(II)} \qquad f_1(\alpha_1) f_3(\alpha_3) + f_2(\alpha_2) \varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0,$$

---

[1] Sur l'emploi général de la transformation homographique dans la construction des nomogrammes, voir *T. de N.*, p. 103, 135 et suiv.

[2] Tels sont les avantages pratiques de la méthode des points alignés que le capitaine Lafay, qui en a fait d'importantes applications notamment au tir des pièces de siège, s'est proposé de mettre *approximativement* sous la forme (I) ou (II) une équation quelconque, à l'intérieur d'un domaine donné. (*Revue d'Artillerie*, t. LVIII, 1901, p. 455. — *Génie civil*, t. XL, 1902, p. 298.)

qui peuvent être mises respectivement sous forme des déterminants

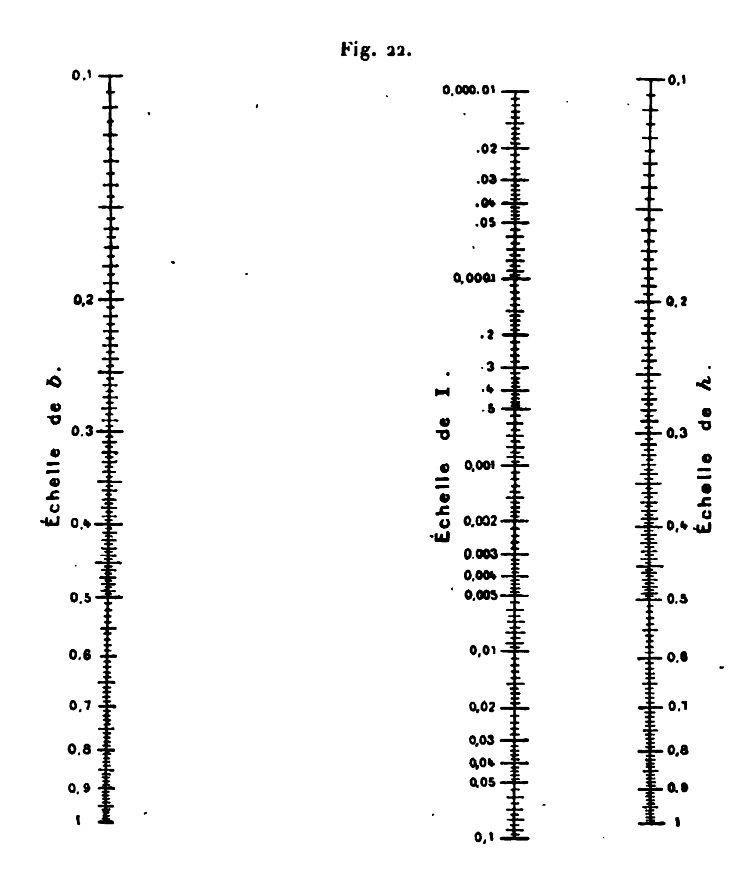
$$\begin{vmatrix} -1 & f_1(\alpha_1) & 1 \\ 1 & f_2(\alpha_2) & 1 \\ 0 & f_3(\alpha_3) & 2 \end{vmatrix} = 0$$

et

$$\begin{vmatrix} -1 & f_1(\alpha_1) & 1 \\ 1 & f_2(\alpha_2) & 1 \\ \varphi_3 - f_3 & -\psi_3 & f_3 + \varphi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

et se traduisent, par conséquent, l'une par trois échelles rectilignes (paral-

Fig. 22.



lèles ou concourantes suivant qu'on opère la traduction géométrique du

déterminant directement ou après une transformation homographique), l'autre par deux échelles rectilignes (parallèles ou non suivant les mêmes conditions) et une échelle curviligne.

A titre d'exemples, voici le nomogramme à points alignés de l'équation des moments d'inertie des rectangles (¹) (*fig.* 22), mise sous la forme

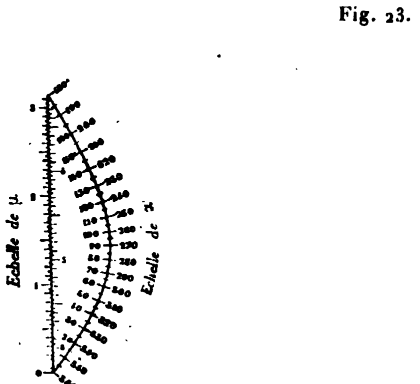
$$\log b + 3\log h = \log 12 I,$$

et celui (*fig.* 23) de l'équation de Képler (²), mise sous la forme

$$\alpha - e\sin\alpha = \mu.$$

Enfin, comme exemple de nomogramme à trois échelles curvilignes,

Fig. 23.



correspondant à la forme (III) la plus générale, nous donnerons celui (*fig.* 24) de l'équation

$$(1+l)h^2 - l(1+p)h - \frac{(1-l)(1+2p)}{3} = 0,$$

qui se rencontre dans le calcul des murs de soutènement (³), et qui peut

---

(¹) *T. de N.*, p. 154.

(²) *T. de N.*, p. 193. Le retour des graduations (α) et (μ) sur elles-mêmes tient à l'application d'un artifice indiqué à cet endroit.

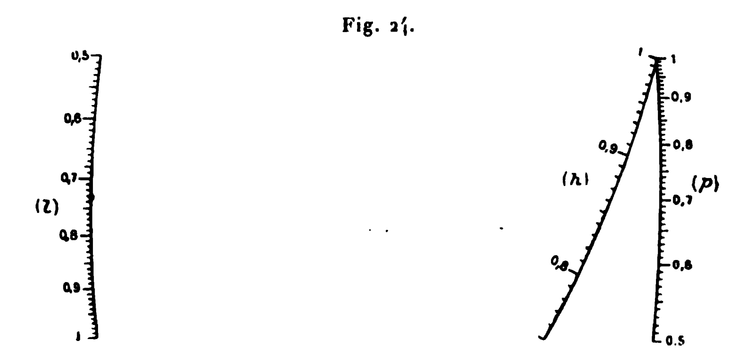
(³) *T. de N.*, p. 198. La construction de ce nomogramme offre un exemple particulièrement intéressant de l'emploi de la transformation homographique sous sa forme la plus générale.

s'écrire :

$$\begin{vmatrix} 2(l^2-1) & 3l(l+1) & l(l-1) \\ 2(2p+1) & 3(p+1) & (2p+1)(p+1) \\ h & 1 & h^2 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut remarquer que le type général d'équation (III) comporte six fonctions arbitraires (obtenues en divisant chaque ligne du déterminant par

Fig. 24.



un de ses éléments non nuls), et que, si les fonctions d'une même ligne sont liées linéairement, l'échelle correspondante du nomogramme est rectiligne ([1]).

15. *Équations à quatre variables.* — Le raisonnement fait au n° **13**, pour montrer que chaque type canonique de nomogramme à trois éléments cotés peut être approprié à une équation quelconque à trois va-

---

([1]) M. Soreau a, dans le Mémoire déjà cité, fondé sur cette remarque une classification des équations représentables en points alignés. En vue de plus d'uniformité entre les nomogrammes à simple ou à double alignement, nous avons légèrement modifié sa conception en appelant *genre nomographique* d'une telle équation l'excès du nombre des fonctions linéairement indépendantes qui la composent sur le nombre des variables. Cet excès, qui varie de 0 à 3, est, dans tous les cas, égal au nombre des échelles *curvilignes* du nomogramme correspondant (*Bul. de la Soc. math.*, 2e série, t. XXVI, 1902, p. 71). Nous avons épuisé l'étude des équations de genre 0 dans un Mémoire spécial (*Acta mathematica,* t. XXI, 1897, p. 301) qui a fourni la matière d'une section (II, B) du Chapitre VI de notre Traité. Dans cette étude, voulant mettre en évidence les types à échelle *régulière* (échelle $x = \alpha$), nous avons réduit les fonctions $f_i(\alpha_i)$ aux α_i, mais les résultats obtenus subsistent intégralement dans le cas général moyennant la substitution aux échelles (α_i) des échelles $f_i(\alpha_i)$.

riables ne subsiste plus pour le cas des nomogrammes à quatre éléments cotés. Autrement dit, à partir de $n=4$, il n'y a pas de mode de représentation nomographique applicable à une équation *quelconque* à n variables. Les équations correspondant à tel ou tel type de nomogramme à n éléments cotés, pour $n \geqq 4$, présentent donc certains caractères fonctionnels plus ou moins particuliers, en sorte qu'ici l'introduction des éléments mobiles peut n'avoir pas seulement pour effet de conduire à des solutions plus simples que celles obtenues au moyen d'un seul plan [1], mais encore de *permettre de résoudre nomographiquement des équations non représentables sur un seul plan*, ce qui est évidemment d'un plus haut intérêt.

Pour en donner immédiatement un exemple, supposons qu'une équation à quatre variables soit de la forme

$$f(\alpha_1, \alpha_2)\,\mathrm{F}(\alpha_3, \alpha_4) + \varphi(\alpha_1, \alpha_2)\,\Phi(\alpha_3, \alpha_4) + \psi(\alpha_1, \alpha_2)\,\Psi(\alpha_3, \alpha_4) = 0.$$

Elle exprime le contact du point à deux cotes

$$x = \frac{f(\alpha_1, \alpha_2)}{\psi(\alpha_1, \alpha_2)}, \qquad y = \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\psi(\alpha_1, \alpha_2)},$$

avec la droite à deux cotes

$$x\,\mathrm{F}(\alpha_3, \alpha_4) + y\,\Phi(\alpha_3, \alpha_4) + \Psi(\alpha_3, \alpha_4) = 0.$$

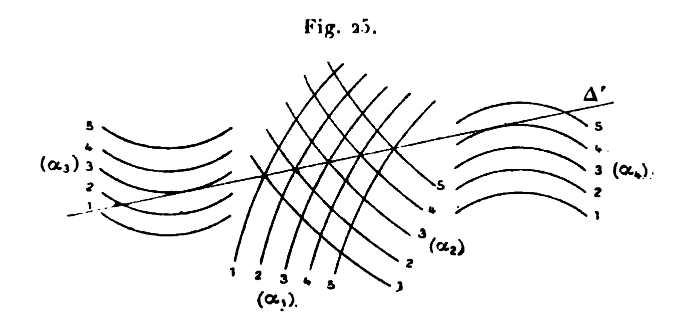
Or, une droite à deux cotes, non représentable de façon permanente sur un plan, peut, ainsi qu'on l'a vu au n° **10**, être déterminée à l'aide d'une droite mobile, grâce à ses deux systèmes d'enveloppes. On obtient ainsi le type de nomogramme représenté par la figure 25. Sa partie fixe comprend les systèmes de lignes (α_1), (α_2), (α_3), (α_4), tracés sur un même plan, les deux premiers définissant le réseau des points à deux

---

[1] Ce cas se présentera pourtant aussi lorsque les éléments mobiles seront simplement substitués à des éléments condensés du plan fixe. *Ex.* : abaques hexagonaux.

cotes (α_1, α_2), et les deux autres constituant les deux systèmes d'enveloppes des droites (α_3, α_4). Cette partie fixe est complétée par une droite mobile, et l'emploi du nomogramme résulte de cette traduction géométrique de l'équation ci-dessus : *lorsque la droite mobile est tangente à la*

Fig. 25.



fois à la ligne (α_3) *et à la ligne* (α_4), *elle passe par le point* (α_1, α_2).

La notation de ce nomogramme, si l'on représente par Δ' la droite mobile, sera

$$(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \Delta', \quad (\alpha_3) \mapsto \Delta', \quad (\alpha_4) \mapsto \Delta', \quad \text{»} \mapsto \text{»}.$$

Il appartient donc au type $(3_1)_r$.

Le cas particulier le plus intéressant est celui où les enveloppes (α_3) et (α_4) se réduisent à des points, auquel cas on retombe sur la méthode des *points alignés*, l'un des trois systèmes étant ici à deux cotes. Pour obtenir le type des équations correspondantes, il suffit, dans le type (III) du numéro précédent [ainsi que dans (I) et (II) qui en sont des cas particuliers], de remplacer les fonctions de α_3 par des fonctions de α_3 et α_4.

Si l'on fait ce remplacement dans le type (I), les points (α_3, α_4) sont condensés (suivant ce qui a été vu à la fin du n° **1**) sur un support rectiligne. On trouve très fréquemment des équations du type (II) transformé, c'est-à-dire

$$f_1(\alpha_1)\,\mathrm{F}(\alpha_3, \alpha_4) + f_2(\alpha_2)\,\Phi(\alpha_3, \alpha_4) + \Psi(\alpha_3, \alpha_4) = 0,$$

qui s'écrit sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} -1 & f_1 & 1 \\ 1 & f_2 & 1 \\ \Phi - F & -\Psi & F + \Phi \end{vmatrix} = 0,$$

Les points (α_3, α_4) sont dès lors déterminés par les équations

$$x = \frac{\Phi - F}{F + \Phi}, \qquad y = \frac{-\Psi}{F + \Phi},$$

entre lesquelles il faut successivement éliminer α_4 et α_3 pour former les équations des systèmes (α_3) et (α_4) constituant le réseau (α_3, α_4).

Comme exemple, nous citerons le nomogramme à points alignés de l'équation complète du troisième degré

$$z^3 + nz^2 + pz + q = 0,$$

où les coefficients n, p, q sont supposés quelconques (¹).

Ici, les systèmes (p), (q) et (z, n) sont définis par

$$(p) \qquad x = -1, \qquad y = p,$$

$$(q) \qquad x = 1, \qquad y = q,$$

$$(z, n) \qquad x = \frac{1 - z}{1 + z}, \qquad y = -\frac{z^3 + nz^2}{1 + z}.$$

D'ailleurs, l'expression de ce dernier x ne contenant que z, on voit immédiatement que le système (z) du réseau (z, n) est formé par des

---

(¹) *T. de N.*, p. 333. La transformation de Tschirnhausen permettant d'amener toute équation du septième degré à la forme

$$z^7 + nz^3 + pz^2 + qz + 1 = 0,$$

la méthode ci-dessus est applicable à toutes les équations algébriques jusqu'au septième degré, inclusivement, comme nous l'avons fait remarquer à l'occasion de la question soulevée par M. Hilbert, et dont il a été fait mention plus haut (*Comptes rendus*, t. CXXXI, 1900, p. 522).

droites parallèles à Oy. Le nomogramme correspondant est celui de la

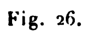


Fig. 26.

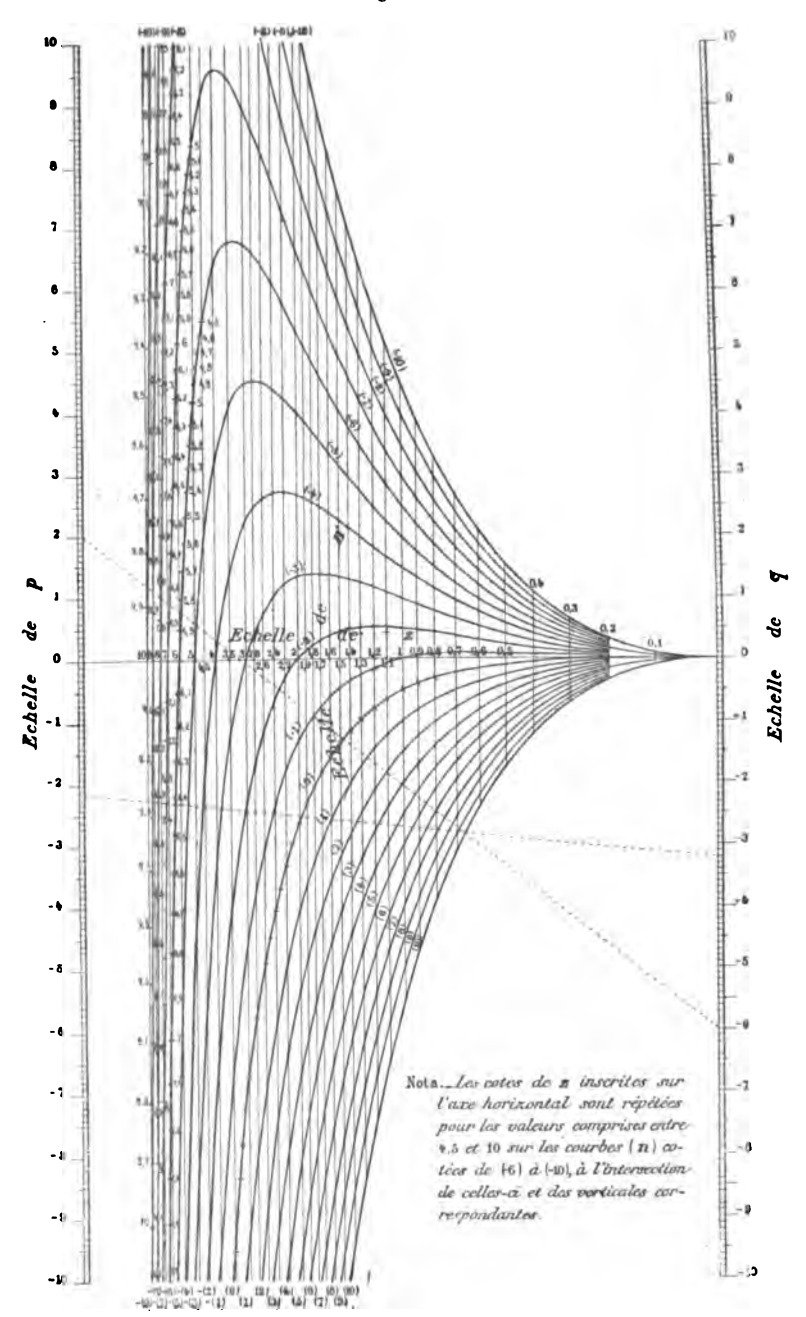


figure 26, sur laquelle sont marquées en pointillé les positions de l'index

répondant aux équations

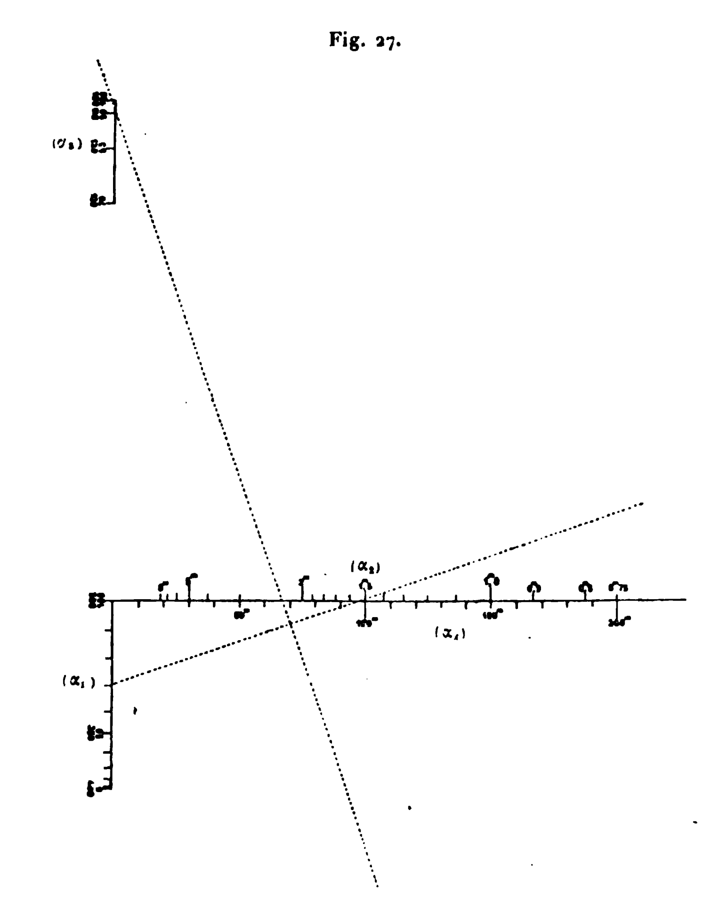
$$z^3 + 2z - 6 = 0 \qquad \text{et} \qquad z^3 + z^2 - 2{,}16z - 3{,}2 = 0,$$

pour lesquelles on a

$$z = 1{,}46 \qquad \text{et} \qquad z = 1{,}6.$$

Le type (**4**$_1$) comporte une variété ponctuelle intéressante aussi à considérer à part, et qui a été étudiée spécialement par M. Goedseels. On peut y supposer les quatre éléments constants constitués au moyen d'une même courbe autre qu'une droite ou un cercle, et notamment au moyen d'un

Fig. 27.



couple de droites. Si ces droites sont rectangulaires, on a un nomogramme

à équerre (¹), dont la notation est

$$(\alpha_1) \mapsto D', \quad (\alpha_2) \mapsto D', \quad (\alpha_3) \mapsto D'_1, \quad (\alpha_4) \mapsto D'_1.$$

L'équation correspondante sera évidemment de la forme

$$(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_3 - \varphi_4) + (f_1 - f_2)(f_3 - f_4) = 0.$$

En voici un exemple (*fig.* 27) emprunté à M. Goedseels (²). Il se rapporte à l'équation

$$\alpha_4 = \alpha_2(100 \sin\alpha_3 + \cos\alpha_3) \sin\alpha_3 \cos\alpha_1$$

qui se rencontre dans les levers tachéométriques.

16. *Structure générale d'un nomogramme à m plans.* — Si, au lieu de deux, on considère m plans superposés, on peut immédiatement décomposer le nomogramme ainsi constitué en une suite de $m - 1$ nomogrammes à deux plans rentrant dans les dix-neuf types canoniques ci-dessus définis. En effet, on peut commencer par fixer le plan π' par rapport au plan π, au moyen de trois contacts, puis le plan π'' par rapport à l'ensemble $(\pi\pi')$ des plans π et π' rendus solidaires, au moyen de trois nouveaux contacts, et ainsi de suite jusqu'au plan $\pi^{(m-1)}$ que trois derniers contacts fixeront par rapport à l'ensemble $(\pi\pi' \ldots \pi^{(m-2)})$.

Les m plans étant ainsi fixés les uns par rapport aux autres, au moyen de ces $3(m-1)$ contacts de position, on constatera l'existence d'un contact de résolution entre deux éléments de l'ensemble $(\pi\pi' \ldots \pi^{(m-1)})$.

Chacun des $6m - 4$ éléments intervenant dans ces $3m - 2$ contacts étant muni d'un nombre quelconque de cotes, on engendrera ainsi le *nomogramme le plus général* que l'on puisse concevoir.

(¹) Un tel nomogramme est évidemment transformable en un nomogramme à parallèles mobiles (note au bas de la page 32) par une rotation de 90° de la droite D'_1 et des systèmes (α_3) et (α_4).

(²) *T. de N.*, p. 239.

Voyons maintenant comment pourra être classé un tel nomogramme. Chaque ensemble successif de trois contacts de position, joint, par convention, au contact de résolution, définit un type de nomogramme à deux plans rentrant dans le Tableau du n° **12**. En inscrivant les uns à la suite des autres les numéros correspondant aux types ainsi successivement obtenus, on aura la désignation du nomogramme à m plans considéré. En d'autres termes, si l'on écrit les uns au-dessous des autres les triples de contacts de position, et, sur le côté, le contact de résolution, de la façon que voici :

$$\left.\begin{array}{ccc} E_1 \mapsto E'_1 & E_2 \mapsto E'_2 & E_3 \mapsto E'_3 \\ F'_1 \mapsto F''_1 & F'_2 \mapsto F''_2 & F'_3 \mapsto F''_3 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ M_1^{(m-2)} \mapsto M_1^{(m-1)} & M_2^{(m-2)} \mapsto M_2^{(m-1)} & M_3^{(m-2)} \mapsto M_3^{(m-1)} \end{array}\right\} N_4 \mapsto N_4^{(m-1)},$$

on placera les unes à la suite des autres les désignations des nomogrammes à deux plans obtenus en rattachant successivement le contact $N_4 \mapsto N_4^{(m-1)}$ à chacune des $m - 1$ lignes du Tableau contigu.

Pour rendre la chose plus claire, appliquons ces généralités à un exemple emprunté à M. Lallemand ([1]), et qui concerne l'équation

$$\varepsilon = \left(\frac{\mu_2 - k_2}{10}\right) H_2 + f_2(H_2) - \left[\left(\frac{\mu_1 - k_1}{10}\right) H_1 + f_1(H_1)\right],$$

relative à la correction des mires, dans les nivellements de précision, les variables étant ε, μ_1, μ_2, H_1 et H_2.

Le nomogramme (*fig.* 28) se compose :

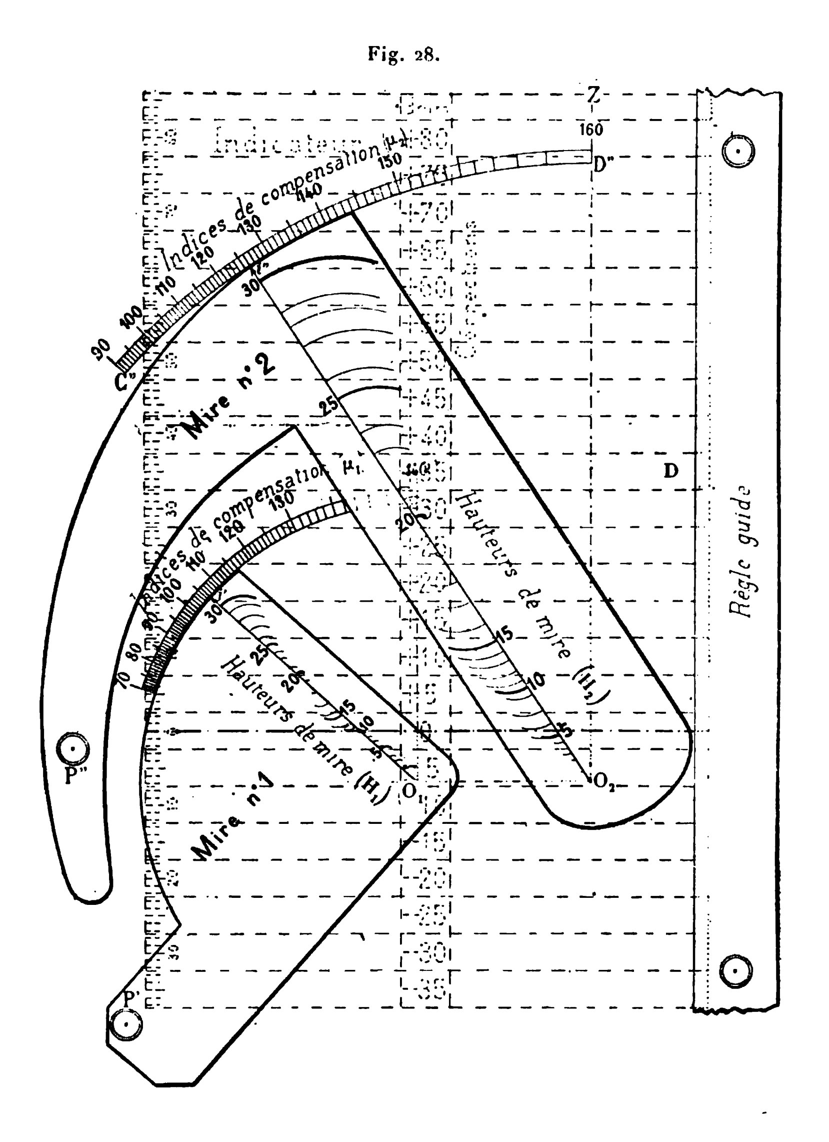
1° Du plan fixe π sur lequel sont marqués deux points fixes O_1, O_2, deux échelles (μ_1), (μ_2) et une droite D (constituée par le bord d'une règle);

([1]) *T. de N.*, p. 370.

2° De deux plans π' et π'' mobiles respectivement autour des points O_1 et O_2, portant chacun un index, i' et i'', et un système de courbes cotées, $(H_1)'$ et $(H_2)''$;

3° Enfin d'un plan π''', dont une droite D''' glisse le long de D et qui

Fig. 28.



porte un système $(\varepsilon)'''$ de droites parallèles, dont celle de cote o sera désignée par $(o)'''$.

Le mode d'emploi est le suivant : Les plans π' et π'' étant fixés (au

moyen des punaises P' et P''), de façon que leurs index i' et i'' soient respectivement en face des points μ_1 et μ_2, on fait glisser le plan π''' le long de la droite D jusqu'à ce que la droite $(o)'''$ soit tangente à la courbe $(H_1)'$. Alors la droite $(\varepsilon)'''$ est celle qui est tangente à la courbe $(H_2)''$. La notation de ce nomogramme est donc

$$\left.\begin{array}{ll} O_1 \,\texttt{\#}\, O'_1 & (\mu_1) \mapsto i' \\ O_2 \,\texttt{\#}\, O''_2 & (\mu_2) \mapsto i'' \\ D \,\texttt{\#}\, D''' & (H_1)' \mapsto (o)''' \end{array}\right\} (H_2)'' \mapsto (\varepsilon)'''.$$

Chacun des trois nomogrammes composants est, comme on voit, du type $(\mathbf{3}_2)$. Le nomogramme complet sera donc considéré comme appartenant au type $(\mathbf{3}_2, \mathbf{3}_2, \mathbf{3}_2)$ que, pour plus de simplicité, on pourra écrire $\overline{(\mathbf{3}_2)}^3$.

Remarques. — 1° Il pourra se faire qu'un même élément mobile intervienne, sur un nomogramme, dans plusieurs positions successives. Pour rattacher ce nomogramme à la classification générale, on devra considérer ces diverses positions comme obtenues au moyen d'autant de plans différents superposés les uns aux autres (¹).

2° Un point intervenant dans un des contacts, pouvant, dans l'ensemble des m plans fixés les uns par rapport aux autres, être déterminé par l'intersection de deux lignes appartenant à des plans différents, ce point sera désigné par les lettres représentatives de ces deux lignes mises entre crochets.

17. *Nomogrammes à double alignement.* — Parmi les nomogrammes

---

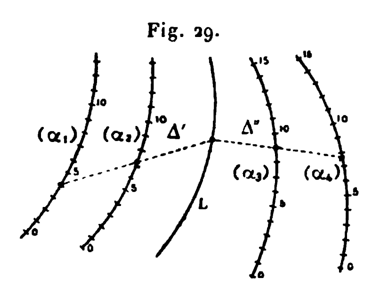
(¹) C'est ainsi que les abaques hexagonaux munis d'échelles binaires, qui permettent, au moyen de $n-3$ glissements du transparent à index (*T. de N.*, p. 317), de représenter des équations de la forme

$$f_1(\alpha_1, \beta_1) + f_2(\alpha_2, \beta_2) + \ldots + f_n(\alpha_n, \beta_n) = 0,$$

doivent être considérés comme des nomogrammes à $n-2$ plans superposés.

à trois plans superposés la classe la plus importante peut-être pour les applications est formée par les nomogrammes à *double alignement* (¹), dont la figure 29 donne le type général dans le cas de quatre variables. Les alignements pris entre les points (α_1) et (α_2) d'une part, (α_3) et (α_4)

Fig. 29.



de l'autre, doivent concourir en un point de la ligne L, dite *des pivots*. Appelant [L] le point quelconque de cette ligne, où concourent les deux alignements, c'est-à-dire le pivot autour duquel on fait tourner l'index mobile servant à la lecture pour l'amener à coïncider successivement avec les deux alignements Δ' et Δ'', ces deux alignements étant supposés réalisés au moyen de droites appartenant à deux plans π' et π'' superposés, on voit que le nomogramme pourra se dénoter

$$\left.\begin{array}{lll} (\alpha_1) \mapsto \Delta' & (\alpha_2) \mapsto \Delta' & [L] \mapsto \Delta' \\ (\alpha_3) \mapsto \Delta'' & (\alpha_4) \mapsto \Delta'' & [L] \mapsto \Delta'' \end{array}\right\} \text{»} \mapsto \text{»},$$

ce qui le fait rentrer dans le type $\overline{(\mathbf{3}_1)}^{2}_{rp}$.

Au point de vue des applications, la seule variété de ce type utile à considérer est celle où la ligne L est droite. Si on la prend pour axe des x, et si l'on appelle λ l'abscisse du pivot situé sur cet axe, on voit que les deux alignements se traduisent par les équations

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \\ f_4 & \varphi_4 & \varphi_4 \end{vmatrix} = 0,$$

(¹) *T. de N.*, p. 213.

entre lesquelles il faut éliminer λ pour avoir l'équation représentée. Le résultat de cette élimination peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 \\ f_2 & \varphi_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \varphi_3 & \psi_3 \\ \varphi_4 & \psi_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f_3 & \varphi_3 \\ f_4 & \varphi_4 \end{vmatrix},$$

f_i, φ_i, ψ_i étant toujours des fonctions de la seule variable α_i.

On peut lui donner une autre forme en s'appuyant sur cette ingénieuse remarque de M. Soreau [1] : si la ligne L est considérée comme une ligne de terre, les droites Δ' et Δ'' peuvent être prises pour traces d'un plan contenant à la fois les points (α_1), (α_2), (α_3) et (α_4). Or, si l'on appelle y et z les coordonnées normales à l'axe L des x, respectivement dans les plans π' et π'', on a, pour les coordonnées homogènes de ces quatre points,

$$\begin{array}{lllll} (\alpha_1) & x=f_1, & y=\varphi_1, & z=0, & t=\psi_1, \\ (\alpha_2) & x=f_2, & y=\varphi_2, & z=0, & t=\psi_2, \\ (\alpha_3) & x=f_3, & y=0, & z=\varphi_3, & t=\psi_3, \\ (\alpha_4) & x=f_4, & y=0, & z=\varphi_4, & t=\psi_4. \end{array}$$

Lors donc qu'on exprime que ces quatre points sont dans un même

---

[1] Cette remarque se trouve dans l'important Mémoire de cet auteur, paru en 1901 dans le *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils* sous le titre : *Contribution à la théorie et aux applications de la Nomographie*, Mémoire que nous avons déjà cité plusieurs fois. La mise sous forme d'un déterminant du quatrième ordre de l'équation générale représentable par double alignement, avec une ligne des pivots rectiligne, a permis à M. Soreau de développer, pour les équations de ce type, une intéressante théorie analytique qui prolonge, en quelque sorte, pour la quatrième dimension, la théorie des équations représentables par simple alignement. Nous renvoyons, pour cette théorie, au Mémoire cité qui contient encore d'autres remarques intéressantes sur divers points de la Nomographie, ainsi qu'un grand nombre d'applications inédites, destinées principalement aux Ingénieurs. Nous avons d'ailleurs donné dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2e série, t. XXVI, 1902, p. 67) une analyse critique du Mémoire de M. Soreau, envisagé au point de vue mathématique. C'est même au cours de cette analyse que nous avons été conduit à proposer la notion du genre nomographique, définie plus haut à propos des nomogrammes à simple alignement, et qui s'étend aussi aux nomogrammes à double alignement. Parmi ceux-ci, ce sont encore ceux ne comportant que des échelles rectilignes qui sont de genre o.

plan, on a

$$\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & 0 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & 0 & \psi_2 \\ f_3 & 0 & \varphi_3 & \psi_3 \\ f_4 & 0 & \varphi_4 & \psi_4 \end{vmatrix} = 0,$$

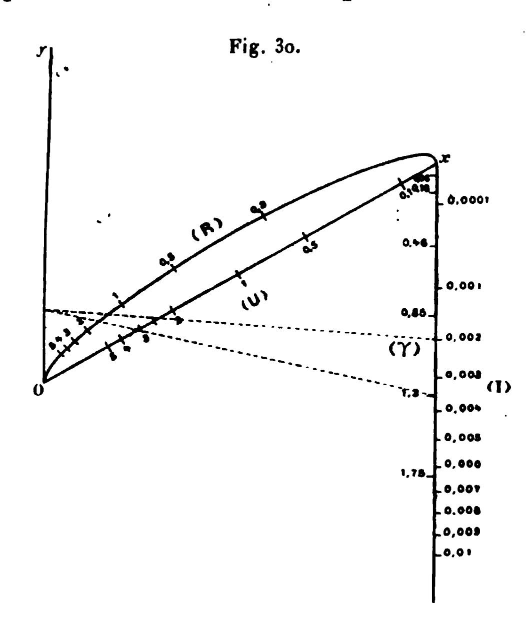
qui est l'équation représentée.

Parmi les équations de ce type une forme fréquente est la suivante :

$$f_1\varphi_2 + f_2 = f_3\varphi_4 + f_4,$$

pour laquelle, en prenant comme axe des pivots l'axe des y, on constitue

Fig. 3o.



respectivement les systèmes (α_1), (α_2), (α_3) et (α_4) au moyen des formules

$$(\alpha_1) \quad x = 1, \qquad y = -f_1, \qquad\qquad (\alpha_3) \quad x = 1, \qquad y = -f_3,$$

$$(\alpha_2) \quad x = \frac{\varphi_2}{\varphi_2 + 1}, \quad y = \frac{f_2}{\varphi_2 + 1}, \qquad\qquad (\alpha_4) \quad x = \frac{\varphi_4}{\varphi_4 + 1}, \quad y = \frac{f_4}{\varphi_4 + 1}.$$

Voici comme exemple (*fig.* 3o) le nomogramme de l'équation de

M. Bazin pour l'écoulement de l'eau dans les canaux (¹) :

$$U\left(1+\frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)=87\sqrt{RI},$$

qui, lorsqu'on l'écrit

$$\frac{\gamma}{R}+\frac{1}{\sqrt{R}}=\frac{87\sqrt{I}}{U},$$

rentre dans le type précédent.

Si la ligne rectiligne des pivots est rejetée à l'infini par une transformation homographique (²), on obtient un nomogramme à alignements parallèles rentrant dans un type déjà rencontré plus haut (³), et qui, au nouveau point de vue d'où nous le considérons, aura pour notation

$$\left.\begin{matrix}(\alpha_1)\mapsto\Delta' & (\alpha_2)\mapsto\Delta' & [\infty]\mapsto\Delta' \\ (\alpha_3)\mapsto\Delta'' & (\alpha_4)\mapsto\Delta'' & [\infty]\mapsto\Delta''\end{matrix}\right\}\text{ » }\mapsto\text{ ».}$$

18. *Résolution des équations algébriques par les images logarithmiques.* — Comme exemple de nomogramme à trois plans superposés nous citerons encore la méthode de résolution des équations algébriques, fondée sur l'emploi des images logarithmiques, qui a été proposée par M. Mehmke.

Supposons une équation algébrique mise sous la forme

$$f(z)=\varphi(z),$$

f et φ étant des polynomes en z et, après avoir construit les images logarithmiques de ces polynomes, définies au n° **10**, prenons les points communs à ces images. Les abscisses de ces points communs satisferont à l'équation

$$f(e^x)=\varphi(e^x).$$

(¹) *T. de N.*, p. 231.

(²) Sur l'emploi de cette transformation dans le sens du double alignement, nous renvoyons au Mémoire de M. Soreau (p. 320 et suiv.).

(³) Note au bas de la page 32. Nous avons d'ailleurs déjà remarqué (note au bas de la page 51) qu'il y a équivalence entre les nomogrammes à parallèles et ceux à équerre.

Les racines z cherchées seront ensuite données, en fonction de ces abscisses, par la formule

$$z = e^x$$

ou

$$\log z = x.$$

Si donc on trace sur le plan les parallèles à Oy définies par cette dernière équation, dans laquelle on ferait varier z, on voit que les racines cherchées seront les cotes de celles de ces parallèles qui passeront par les points communs aux images des polynomes f et φ. Or, d'après ce que nous avons vu au n° **10**, si f et φ sont des binomes en z, leurs images logarithmiques pourront être obtenues par translation de transparents sur lesquels, pour chacune d'elles, on n'aura besoin de tracer qu'une seule courbe. De là, la méthode de M. Mehmke :

Le plan fixe π *porte deux axes* Ox *et* Oy *pourvus chacun d'une graduation logarithmique, des parallèles* (z) *au second étant en outre menées par les points de division du premier. Sur ce plan fixe on applique deux plans transparents* π' *et* π'', *munis d'axes* $O'x'y'$ *et* $O''x''y''$, *de même orientation que* Oxy, *et portant respectivement l'un l'image logarithmique* I' *du binome* $x^{m'} + x^{n'}$ *avec les index* D'_1 *et* D'_2, *de coefficients angulaires* m' *et* n', *que l'on fait passer respectivement par les points* (p) *et* (q) *de la graduation de* Oy, *l'autre l'image logarithmique* I'' *du binome* $x^{m''}$ *et* $x^{n''}$ *avec les index* D''_1 *et* D''_2, *de coefficients* m'' *et* n'', *que l'on fait passer respectivement par les points* (r) *et* (s) *de la graduation de* Oy.

Les cotes des parallèles (z) *passant par les points communs aux deux images logarithmiques sont les racines de l'équation*

$$pz^{m'} + qz^{n'} = rz^{m''} + sz^{n''}.$$

D'ailleurs, en vertu d'une remarque faite au n° **10**, les cotes de la graduation de Oy étant essentiellement positives, on devra considérer à part

les images logarithmiques des binomes correspondant aux diverses combinaisons de signes possibles dans les deux membres.

En tenant compte de la seconde Remarque terminant le n° **16**, on voit qu'un tel nomogramme peut être dénoté

$$\left.\begin{array}{lll}(p)\mapsto D'_1, & (q)\mapsto D'_2, & Y_\infty \mapsto O'Y' \\ (r)\mapsto D''_1, & (s)\mapsto D''_2, & Y_\infty \mapsto O''Y''\end{array}\right\} (z)\mapsto [I', I''].$$

Il appartient donc au type $\overline{(\mathbf{3}_1)}^2$.

En particulier, pour l'équation complète du 3e degré qui peut s'écrire

$$pz + q = rz^{-1} + sz^{-2},$$

on devra avoir sur l'un des transparents les images de la figure 18, sur l'autre celles de la figure 18 *bis*.

Si l'un des binomes se réduit à un monome, on peut toujours faire en sorte que son coefficient soit réduit à l'unité; par suite, son image logarithmique, qui est alors une droite, reste fixe et peut être tracée sur le plan π. On peut même tracer d'avance sur ce plan les droites correspondant aux diverses valeurs de l'exposant μ. On aura ainsi un nomogramme à deux plans superposés seulement, permettant de résoudre toutes les équations trinomes, évidemment réductibles à la forme

$$z^\mu = pz + q,$$

moyennant que le transparent porte les images représentées par la figure 18.

Ce nomogramme est représenté par la figure 31, le transparent étant mis en place pour la résolution de l'équation

$$z^3 = 2,1z + 9.$$

L'image de $z + 1$ coupant la radiante $\mu = 3$ sur la parallèle $z = 2,4$, cette dernière valeur est la racine positive de l'équation proposée.

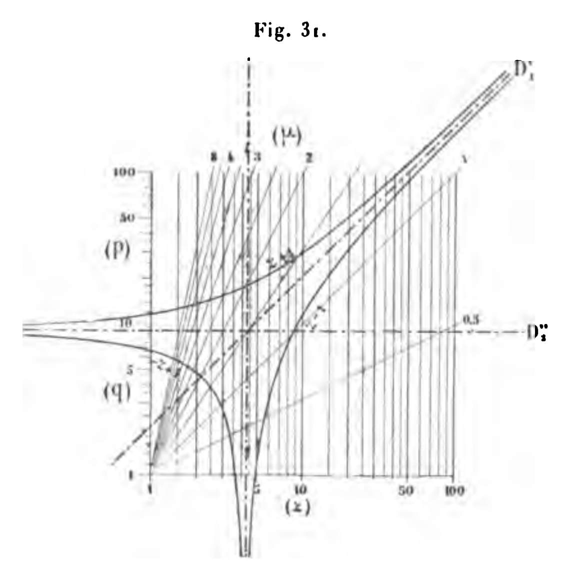
La notation de ce nomogramme sera

$$(p) \mapsto D'_1, \qquad (q) \mapsto D'_2, \qquad Y_\infty \mapsto O'Y', \qquad (\mu, z) \mapsto I',$$

ce qui le rattache encore au type (3_1).

M. Mehmke a d'ailleurs donné à sa méthode une plus large extension. Si, sur le plan π', au lieu de l'image du seul binome $x^{m'} + x^{n'}$, on trace le système de lignes à une cote, constitué par les images (λ') des trinomes

Fig. 31.



$x^{m'} + x^{n'} + \lambda' x^{\nu'}$ (ν' étant un nouvel exposant constant) ainsi que l'index D'_3 de coefficient angulaire ν', on voit facilement, en répétant le calcul du n° **10**, que si, une fois le plan π' fixé sur le plan π, l'index D'_3 coupe la graduation logarithmique de Oy au point coté (u), *l'image* (λ') *du plan* π' *donne sur le plan* π *l'image du polynome* $pz^{m'} + qz^{n'} + \lambda z^{\nu'}$, *tel que* $\lambda = \lambda' u$.

Traçant de même sur le plan π'' le système des images (μ'') des trinomes $x^{m''} + x^{n''} + \mu'' x^{\nu''}$ et l'index D''_3, on voit que les plans π' et π'' appliqués sur le plan π permettront cette fois de résoudre les équations

$$pz^{m'} + qz^{n'} + \lambda z^{\nu'} = rz^{m''} + sz^{n''} + \mu z^{\nu''},$$

ce qui étend la méthode jusqu'à l'équation complète du 5ᵉ degré. Il faut

remarquer toutefois que les paramètres p, q, λ, r, s, μ lus sur une échelle logarithmique sont essentiellement positifs et, par suite, qu'il faut autant de transparents distincts que l'on doit considérer de combinaisons de signes parmi les coefficients de l'équation. Dans le cas précédent, les images uniques correspondant à ces diverses combinaisons de signes pouvaient coexister sur le même transparent; il n'en va plus de même lorsqu'à chaque combinaison correspond tout un système de lignes cotées.

TABLE DES MATIÈRES.

33131 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

[illegible] PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
quai des Grands-Augustins, 55.



